RAJA GABAGLIA E JOÃO RIBEIRO

ARITMÉTICA

ADMISSÃO AO CURSO GINASIAL

LIVRARIA FRANCISCO ALVES

RAJA GABAGLIA E JOÃO RIBEIRO

RITMÉTICA

ADMISSÃO AO CURSO GINASIAL

(TEXTO DO "EXAME DE ADMISSÃO" DOS MESMOS AUTORES
ACRESCIDO DE 1000 EXERCÍCIOS E PROBLEM...

. . . . 45
...imo múltiplo co-
. . . . 49
...ão e comparação. 57
...nárias e números
. . . . 74
...s; operações. 90
...rias em números
...ecimais periódicos 99
... de unidades de
...tro cúbico; múl-
...múltiplos e sub-
...plos e submúl-
...sileiro 104
...lação) 124

LIVRARIA FRANCISCO ALV...
EDITORA PAULO DE AZEVEDO LTD...
166, RUA DO OUVIDOR — RIO DE JANEIRO
SÃO PAULO | BELO HORIZONT...
292, Rua Líbero Badaró | Rua Rio de Janeir...
1958

PROGRAMA E ÍNDICE

Números inteiros. Algarismos arábicos e romanos. Numeração decimal 5

Operações fundamentais sôbre números inteiros 13

Prova real das operações fundamentais 32

Divisibilidade por 10, 2, 5, 9 e 3. Prova dos noves 39

Números primos. Decomposição de um número em fatôres primos. 45

Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum de dois ou mais números. 49

Frações ordinárias: simplificação e comparação. 57

Operações sôbre frações ordinárias e números mistos. 74

Números decimais fracionários; operações. 90

Conversão das frações ordinárias em números decimais e vice-versa; números decimais periódicos 99

Noções sôbre o sistema legal de unidades de medir. Metro, metro quadrado e metro cúbico; múltiplos e submúltiplos usuais. Litro; múltiplos e submúltiplos usuais. Quilograma; múltiplos e submúltiplos usuais. Sistema monetário brasileiro 104

Exercícios e Problemas (Recapitulação) 124

NUMERAÇÃO. OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS SÔBRE NÚMEROS INTEIROS

Grandeza e sua medida — *Grandeza* é tudo que é susceptível de aumento ou de diminuição; exemplos: uma mesa, um cacho de uvas, etc.

Para medir qualquer grandeza, escolhe-se uma da mesma espécie para têrmo de comparação.

A grandeza conhecida com a qual se comparam tôdas as grandezas da mesma espécie chama-se *unidade*. Assim, para medir um comprimento, a unidade é o metro; para avaliar a capacidade de um balde, a unidade é o litro; para determinar quantos soldados tem um batalhão, a unidade é um soldado, etc.

Número — Número é o resultado da medida de uma grandeza.

Desde logo, podem-se obter três espécies de números: I) *o número inteiro,* II) *o número quebrado* ou *fração* e III) *o número misto*.

Número inteiro é o que só contém unidades inteiras; ex.: cinco alunos, vinte livros, seis metros.

Fração é o que contém uma ou mais partes iguais da unidade; ex.: um quarto de hora, cinco oitavos de uma maçã, etc.

Número misto é o composto de um número inteiro e de uma fração; exemplo: quatro horas e um quarto, três palmos e um têrço, etc.

Número abstrato e número concreto — O número é dito *abstrato* quando não vem acompanhado da espécie de unidades a que se refere; exemplo: dois, um têrço.

O número é dito *concreto* quando vem acompanhado da espécie de unidades a que se refere; exemplo: sete tinteiros, duas laranjas, etc.

A série dos números — Dado um número inteiro é sempre possível ajuntar-lhe uma unidade e obter, assim,

um número maior do que o número dado. O mesmo se poderá fazer com o número obtido, e assim sucessivamente, de modo a obterem-se números cada vez maiores. Diz-se por isso, que *a série dos números inteiros é ilimitada*.

Por ser ilimitada a série dos números inteiros torna-se impossível atribuir a cada um dêles um nome e um sinal gráfico diferente. O homem recorreu, então, a um artifício que lhe permitisse *exprimir* e *representar* os números com poucas palavras e poucos sinais. Dêsse artifício resultou a numeração.

NUMERAÇÃO FALADA

Numeração falada é a arte de exprimir todos os números com poucas palavras convenientemente escolhidas e combinadas.

Os primeiros nove números têm nomes especiais e exprimem unidades simples ou de primeira ordem; são: *um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove*.

O número seguinte foi chamado *dez* ou *dezena* e constituiu uma unidade de 2.ª ordem e compreende dez unidades simples. O número formado por dez dezenas reunidas foi chamado *cem* ou uma *centena* e é a unidade de terceira ordem.

O número formado de dez centenas foi chamado *mil* ou um *milhar* e é a unidade de quarta ordem. E, continuando assim, vêm sucessivamente as *dezenas de milhar*, as *centenas de milhar*, os milhões ou *unidades de milhão*, as *dezenas de milhão*, as *centenas de milhão*...

As dezenas são enunciadas do mesmo modo que as unidades simples; assim, dizemos: uma dezena, duas dezenas, três dezenas... nove dezenas. O uso, porém, emprega as seguintes palavras: *vinte, trinta, quarenta, cinqüenta, sessenta, setenta, oitenta, noventa*, para significarem, respectivamente, duas, três, quatro, cinco, seis, sete, oito e nove dezenas.

Os números compreendidos entre duas dezenas consecutivas são enunciados juntando-se ao nome da dezena

o nome de cada um dos nove primeiros números; assim, temos vinte e um, vinte e dois, vinte e três... vinte e nove, trinta, trinta e um, trinta e dois... até noventa e nove. O uso deu nomes especiais a alguns dos números compreendidos entre dez e vinte; assim, diz-se *onze, doze, treze, quatorze, quinze*, em vez de dez e um, dez e dois, dez e três, dez e quatro, dez e cinco, dizendo-se, porém, dali em diante, dezesseis, dezessete, dezoito, dezenove.

As centenas são enunciadas do mesmo modo que as unidades simples ou do que as dezenas; assim, dizemos: uma centena, duas centenas... nove centenas.

O uso, porém, diz *cem* ou *cento, duzentos, trezentos, quatrocentos, quinhentos, seiscentos, setecentos, oitocentos, novecentos* para exprimirem respectivamente duas, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove centenas.

Os números compreendidos entre duas centenas consecutivas são formados juntando-se sucessivamente ao nome da centena os nomes dos noventa e nove primeiros números ; assim, dizemos: cento e um, cento e dois, cento e três... cento e noventa e nove, duzentos, duzentos e um, duzentos e dois... até novecentos e noventa e nove.

O mesmo se dirá com as ordens superiores e ter-se-á mil e um, mil e dois, mil e três... mil novecentos e noventa e nove, dois mil, dois mil e um... três mil... nove mil novecentos e noventa e nove. E depois: dez mil, dez mil e um, dez mil e dois... dez mil novecentos e noventa e nove, onze mil, onze mil e um... até noventa e nove mil novecentos e noventa e nove. E logo após cem mil, cem mil e um... até novecentos e noventa e nove mil novecentos e noventa e nove. E, em seguida, um milhão. E assim por diante, indefinidamente.

As coleções formadas por diversas unidades chamam-se *ordens de unidades*. Temos as três primeiras ordens: unidades simples, dezenas e centenas, que formam a *primeira classe*, a das unidades; temos depois as três ordens das unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar, que formam a *segunda classe*, a dos milhares; em seguida, vêm as três ordens das unidades de milhão, de-

zenas de milhão e centenas de milhão, que formam a *terceira classe*, a dos milhões; após temos a *quarta classe*, a dos bilhões, com as três ordens (unidades, dezenas e centenas de bilhão); e, assim, sucessivamente, temos as classes dos *trilhões*, *quatrilhões*, etc. Cada uma com três ordens: unidades, dezenas e centenas.

Princípio geral da numeração — Êste modo de grupar os números fornece o princípio fundamental da numeração que é o seguinte: *dez unidades de uma ordem formam uma unidade de ordem imediatamente superior.*

Assim, dez unidades formam uma dezena, dez dezenas uma centena, dez centenas um milhar, dez milhares uma dezena de milhar...

NUMERAÇÃO ESCRITA

Os algarismos — Os números são representados gràficamente por meio de certos sinais, chamados *algarismos*. Os algarismos são dez: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Os nove primeiros representam os nove primeiros números e se enunciam respectivamente: um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove. O último, o décimo, chama-se *zero*.

Os algarismos supra são conhecidos pela designação de algarismos arábicos.

Os nove primeiros algarismos são geralmente chamados *significativos* o que, aliás, não tem razão de ser, porque, se por si mesmo o zero nada representa, êle, contudo, serve para indicar que o número não possui unidades de uma certa ordem.

Princípio da numeração escrita — A numeração escrita baseia-se na seguinte convenção, que é o seu princípio fundamental: *Todo algarismo colocado à esquerda de outro representa unidades dez vêzes maiores do que as dêste outro.*

Assim, se escrevermos algarismos uns em seguida a outros, o primeiro algarismo à direita representa unidades simples, o segundo dezenas, o terceiro centenas, o quarto

unidades de milhar, e assim por diante. Portanto, no número 624, 4 representa unidades, 2, dezenas e 6, centenas. No número 3005, 5 representa unidades e 3, unidades de milhar; os dois 00 indicam, o primeiro que não há dezenas, o segundo que não há centenas.

Valor absoluto e valor relativo — Do exposto, conclui-se que os algarismos ditos significativos têm dois valores: o *absoluto* e o *relativo*.

O *valor absoluto* de um algarismo é o valor que êle tem isolado e lhe é dado pela sua forma.

O *valor relativo* de um algarismo é o valor que êle tem pela posição que ocupa no número. Assim, em 36, o algarismo 6 representa unidades simples; em 360, o mesmo algarismo representa dezenas; em 3600 representa centenas.

O algarismo 0 isolado não têm valor.

Regra para escrever um número inteiro — *Para escrever um número inteiro, colocam-se em seguida uns dos outros, da esquerda para a direita, os algarismos que exprimem as centenas, dezenas e unidades de cada classe do número, preenchendo com zero as ordens que faltarem.*

Seja escrever dezoito milhões três mil e sete; de acôrdo com a regra, principia-se a escrever da esquerda para a direita:

milhões	*milhares*	*unidades*
18	003	007

Regra para ler um número inteiro — *Para ler um número, divide-se-o mentalmente em grupos de três algarismos, da direita para a esquerda, podendo o último ter um ou dois algarismos; em seguida, lê-se cada grupo, principiando pela esquerda e dando-lhe o nome da classe de unidades que representa.*

Assim, o número 48 756 426, lê-se: quarenta e oito milhões, setecentos e cinqüenta e seis milhares, quatrocentos e vinte seis unidades.

NOTA: Na prática não se diz o nome da última classe.

Base de um sistema de numeração — Na numeração que acabamos de explicar, 10 unidades formam uma dezena, 10 dezenas formam uma centena, 10 centenas, um milhar, e assim por diante. Dizemos, então, que a *base* da numeração é dez e que o sistema de numeração é *decimal*.

Base de um sistema de numeração é, portanto, o número de unidades de uma ordem necessário para formar uma unidade de ordem imediatamente superior.

Outros sistemas de numeração — É evidente que a base da numeração pode ser diferente de 10. Temos um exemplo na forma por que se negociam certas mercadorias: as frutas não se vendem às dezenas, centenas, milhares, mas às dúzias; alguns artigos de papelaria (lápis, canetas, etc.) vendem-se às dúzias e grosas ou dúzias de dúzias. A base da numeração, nesses casos, é 12.

A adoção da base decimal proveio certamente do fato do homem contar primitivamente pelos dedos, como fazem as crianças.

O número de algarismos de cada sistema é dado pelo número da base. No sistema decimal são indispensáveis dez algarismos; no quinário, cinco; no duodecimal, doze; no vigesimal, vinte; e assim por diante.

Algarismos romanos — Os algarismos que hoje empregamos geralmente são *arábicos*. Além dêsses, ainda são usados os *algarismos romanos*, assim chamados por serem os dos Romanos, cuja civilização herdamos.

Os algarismos romanos são usados ainda nos mostradores de alguns relógios, nas inscrições em monumentos, nas moedas, nos nomes dos reis e dos papas, na numeração do prefácio e de notas marginais dos livros, etc.

Os algarismos romanos vulgarmente empregados são:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

O sistema de numeração romana se baseia nas convenções seguintes:

1.ª — *Se à direita de um algarismo romano se escreve um outro de valor igual ou menor, o valor do primeiro fica aumentado do valor do segundo.*

Exemplos: *VII* é 5 mais 2 ou 7; *XX* é 10 mais 10 ou 20; *LXXXV* é 50 mais 30 mais 5 ou 85.

2.ª — *Se à esquerda de um algarismo romano se escreve outro de valor menor, o valor do primeiro algarismo fica diminuido do valor do segundo.*

Exemplos: *IV* é 5 menos um ou 4; *IX* é 10 menos 1 ou 9; *LD* é 500 menos 50 ou 450.

3.ª — *Um traço horizontal sôbre um algarismo ou sôbre um grupo de algarismos multiplica por mil o valor do algarismo ou do grupo.*

Exemplo: $\overline{V}$ indica 5.000; $\overline{VIII}$ indica 8.000; $\overline{XLV}$ indica 45.000: e assim por diante.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

1. Em que consiste o artifício da numeração?
2. Que é número abstrato? Dê exemplos.
3. Que é número concreto? Dê exemplos.
4. Que sabe a respeito da série dos números inteiros?
5. Que é base de um sistema de numeração?
6. Se a base do sistema de numeração fôr 7 de quantos algarismos diferentes precisaremos para escrever todos os números?
7. Que é valor absoluto de um algarismo?
8. Que é valor relativo de um algarismo?
9. Como se procede para ler um número?
10. Para quê se usam ainda hoje os algarismos romanos?
11. Quantos algarismos são necessários para escrever todos os números no sistema decimal?
12. Qual o princípio fundamental da numeração escrita?
13. Quantos números inteiros de dois algarismos há no sistema decimal? Resp.: 90.
14. Quantos números inteiros de cinco algarismos há no sistema decimal? Resp.: 90 000.
15. Quantos números inteiros de oito algarismos há no sistema decimal?
16. Um número tem dezoito algarismos. Qual a ordem de suas unidades mais elevadas?
17. Decomponha o número 85 349 nas unidades das diversas ordens. Faça o mesmo para o número 3 583 225.
18. Como se pode tornar um número dez, cem, mil vêzes maior?
19. Se um número termina em dois zeros, como se pode torná-lo dez, cem vêzes menor?
20. Que diferença há entre *número* e *algarismo*?

21. Escreva com algarismos arábicos os seguintes números: quatrocentos e noventa e dois; dez mil e três; quatro bilhões, cinco mil e dois; três milhões e doze; um trilhão, dois mil e um; dois milhões, setecentos mil e três.

22. Leia os números: 426; 8 050; 10 726; 88 999; 101 257; 10 325; 1 467 876; 2 532 758; 99 999 999; 1 000 003; 8 832 573 476; 5 000 000 008; 1 000 256 307; 5 364 000 006.

23. Como se chamam as unidades de 7.ª ordem?

24. Como se chamam as unidades de 9.ª ordem?

25. Qual a classe mais elevada num número de onze algarismos?

26. Qual o menor número de cinco algarismos?

27. Diga qual o maior número de oito algarismos.

28. Quantos algarismos terei de escrever para numerar 681 páginas de um caderno? Resp.: 1 935.

29. Quantos números inteiros há de 640, inclusive, até 672, exclusive? Resp.: 32.

30. Quantos números inteiros há de 53, exclusive, até 87 inclusive? Resp.: 34.

31. Quantas unidades de 2.ª ordem há em 37 unidades de 5.ª ordem? Resp.: 37 000.

32. Qual o menor número que posso formar com os algarismos 7, 9 e 1? E qual o maior? Resp.: 179 e 971.

33. Escreva o maior número de quatro algarismos diferentes entre si. Resp.: 9 876.

34. Escreva o menor número de cinco algarismos diferentes entre si. Resp.: 10 234.

35. No sistema decimal de numeração 100 unidades de 3.ª ordem formam 10 unidades de que ordem? Resp.: 4.ª ordem.

36. Escreva com algarismos romanos os números: vinte; oitenta e três; noventa e seis; cento e sete; quinhentos e vinte e quatro; novecentos e trinta e três; novecentos e noventa e nove mil; três mil e dez; oitenta mil, cento e vinte e cinco.

37. Escreva com algarismos romanos os números: 28; 305; 768; 497; 5 000; 1 500; 7 001; 10 004; 40 356; 72 028.

38. Diga quais as convenções empregadas para representar os números com algarismos romanos.

39. Leia os números: V; IV; IX; XXX; XL; DL; CD; CM; MCCLIV; MMMDCXXXVI; MCMLVII; $\overline{\text{II}}$CCCXXVIII; $\overline{\text{VXC}}$DCCXII.

40. Como se escreve o número imediatamente inferior a CMXCV?

41. Escreva com algarismos romanos o número mil vêzes maior do que DCXXXII.

42. Escreva em ordem crescente (do menor para o maior) os seguintes números:

CII XCI LXXXVII

43. Torne o número $\overline{\text{XD}}$X mil vêzes menor.

44. Escreva em ordem decrescente (do maior para o menor) os números:

MDVIII CMXCIX MCCCI

45. Possuo 348 selos. Quantos me faltam para meio milhar?

46. Que número preciso somar a 27 637 para ter uma centena de milhar?

ADIÇÃO

Definição — Chama-se adição a operação pela qual se reúnem em um só número tôdas as unidades de outros números.

O resultado da operação chama-se *soma* ou *total;* os números que se adicionam chamam-se *parcelas*.

Da própria definição de adição, resulta que só podemos somar números concretos da mesma espécie.

O sinal de adição é +, que se lê *mais*.

Assim, $8 + 5 + 2 = 15$,

lê-se: *oito mais cinco mais dois é igual a quinze*. As parcelas são 8, 5, 2 e o total é 15.

Tabuada — Devemos ter de cor as somas dos números simples. Enquanto não conseguirmos êste resultado, bastará consultar a tabuada ao lado.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Quando quisermos somar dois números simples, 4 com 5, por exemplo, procuraremos na primeira linha o número 5 e na primeira coluna (linha vertical) o número 4; no cruzamento, da coluna que começa por 5 com a linha que começa por 4, encontraremos 9, que é a soma dos dois números.

NOTA: Se tomássemos 5 na 1.ª linha horizontal e 4 na 1.ª coluna, também encontraríamos, no cruzamento, 9. Isto mostra que *a ordem das parcelas não altera a soma*:

$$4 + 5 = 5 + 4$$

Regra para somar números inteiros quaisquer — *Escrevem-se as parcelas umas debaixo das outras, de sorte que as unidades da mesma ordem fiquem na mesma coluna vertical* (unidades debaixo de unidades, dezenas debaixo de dezenas...); *sublinha-se a última parcela; em seguida, somam-se as unidades. Se êsta soma não passa de 9, se a escreve debaixo; se passa de 9, só se escrevem as unidades e se retêm as dezenas para somar com os números da coluna das dezenas. De modo análogo, somam-se as dezenas, centenas, etc., e escreve-se o último resultado tal como é obtido.*

Seja somar os números 1046, 7139 e 457.

Dispõem-se as parcelas da maneira seguinte:

$$\begin{array}{r} 1046 \\ 7139 \\ \underline{457} \\ 8642 \end{array}$$

Dir-se-á: 6 mais 9, 15, mais 7, 22; escreve-se 2 e retêm-se 2 dezenas; 2 dezenas mais 4, 6, mais 3, 9, mais 5, 14 dezenas; escreve-se 4 e retém-se 1 centena; 1 centena mais 1, 2, mais 4, 6 centenas, que se escreve; 1 milhar mais 7, 8 milhares, que se escreve. Ter-se-á, então, a soma 8642.

SUBTRAÇÃO

Definição — *Subtração* é a operação pela qual se tira de um número tôdas as unidades de outro.

Os dois números dados são os *têrmos da subtração*; o número do qual se tira o outro é o *minuendo*, e o número que se tira é o *subtraendo*.

Ao resultado da subtração dá-se o nome de *resto*, quando se procura saber o que fica do número maior tirando-se o menor; *excesso*, quando se procura saber de quanto o maior ultrapassa o menor; *diferença*, quando se procura saber de quantas unidades diferem entre si os dois números dados.

É evidente que só se pode subtrair um número concreto de outro da mesma espécie.

O sinal de subtração é — e lê-se *menos*.

Assim, $8 - 2 = 6$

lê-se *oito menos dois é igual a seis*.

A subtração como operação inversa — Da definição da subtração, conclui-se imediatamente que o maior número compõe-se do menor número e da diferença, isto é, o minuendo é igual ao subtraendo mais a diferença.

Esta consideração conduz a uma segunda definição da subtração.

A subtração é a operação que têm por fim, dada a soma de dois números e um dêles, procurar o outro.

Da segunda definição se deduz ser a subtração uma operação inversa da adição.

Propriedade da subtração — *Aumentando-se ou diminuindo-se de um mesmo número os têrmos de uma subtração, sua diferença não muda.*

Exemplo: A diferença entre 8 e 2 é 6; se somarmos a 8 e a 2 o mesmo número, seja 5, a diferença entre as duas somas continúa a ser 6.

Com efeito, $8 + 5 = 13 \quad 2 + 5 = 7 \quad 13 - 7 = 6$

Tabuada — Quando o subtraendo é um número simples e o resto é menor do que 10, tudo se resolve fàcilmente com a própria tabuada da adição (pág. 13).

Seja, por exemplo, subtrair 7 de 15. Evidentemente o resto vai ser menor do que 10, porque 10 mais 7 dá 17, que é maior do que o minuendo 15. Procura-se na primeira linha o subtraendo 7 e desce-se a coluna que nêle começa até encontrar-se o minuendo 15. O número que

começar a linha em que está 15 será o resto procurado, isto é, 8. Nem podia deixar de ser assim, pois, como vimos no estudo da soma, 8 é número que somado com 7 dá 15.

Regra para subtrair um número qualquer de outro — *Para subtrair um número qualquer de outro, escreve-se o subtraendo debaixo do minuendo, de sorte que as unidades da mesma ordem se correspondam; sublinha-se; em seguida, tira-se o valor de cada algarismo do subtraendo do seu correspondente no minuendo, e escreve-se em baixo o resultado. Se um algarismo do minuendo for menor que o seu correspondente no subtraendo, ajunta-se 10 ao primeiro e subtrai-se dessa soma o algarismo do subtraendo; na subtração parcial seguinte, aumenta-se o algarismo do subtraendo de uma unidade. O número assim obtido é o resto ou diferença.*

1.º Exemplo:

Subtrair 452 de 786. Escreve-se 452 debaixo de 786, de sorte que as unidades da mesma ordem se correspondam.

$$\begin{array}{r} 786 \\ 452 \\ \hline 334 \end{array}$$

Sublinha-se e, em seguida, diz-se: 6 unidades menos 2, 4, que se escreve na coluna das unidades; 8 dezenas menos 5, 3, que se escreve na coluna das dezenas; 7 centenas menos 4, 3, que se escreve na coluna das centenas.

2.º Exemplo:

Subtrair 2465 de 3032.

$$\begin{array}{r} 3032 \\ 2465 \\ \hline 567 \end{array}$$

Dispostos convenientemente os têrmos da subtração, nota-se que não se pode tirar 5 unidades de 2; então, aumenta-se mentalmente o minuendo de uma dezena ou dez unidades e se diz: 12 menos 5, 7 (escreve-se 7 na coluna das unidades). Em seguida, mentalmente, às dezenas do subtraendo soma-se uma dezena e se diz: 3 de-

zenas menos 7 não é possível, aumenta-se mentalmente 3 dezenas de uma centena ou de 10 dezenas e se diz: 13 menos 7, 6, que se escreve na coluna das dezenas. Depois, mentalmente, às centenas do subtraendo aumenta-se uma centena e se diz: 0 menos 5 centenas, não é possível; aumenta-se, portanto, e também mentalmente, 0 centenas de dez centenas ou um milhar e se diz: 10 menos 5, 5, que é escrito na coluna das centenas. Em seguida, aumenta-se 1 aos milhares do subtraendo e se diz: 3 menos 3, 0, que não é necessário escrever.

O resto obtido é 567.

OBSERVAÇÃO — O artifício usado nêste segundo exemplo se baseia na propriedade da subtração estudada à pág. 15. Com efeito, não fizemos mais do que somar a mesma quantidade a ambos os têrmos da subtração: quando somamos 10 dezenas ao minuendo, logo somamos uma centena ao subtraendo; e assim por diante.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

1. Que é adição?
2. Enuncie a regra para efetuar a adição de números inteiros
3. Que é subtração?
4. Enuncie a regra para subtrair um número inteiro de outro
5. Enuncie a propriedade da subtração.
6. Efetue as seguintes somas:

4 002 + 5 + 7 =
480 + 3 005 + 4 587 + 87 005 =

7. Dizer porque a primeira das adições abaixo pôde ser feita da esquerda para a direita e a segunda, não.

2 357	6 259
6 120	435
402	8 024

8. Complete a seguinte igualdade:

325 + 583 + ... + 28 = 3 927.

9. Que alteração sofrerá uma soma de duas parcelas se se aumentar a primeira de 128 e a segunda de 57?
Resp.: Aumentará de 185 unidades.

10. Que alteração sofrerá uma soma de três parcelas se à primeira destas acrescentarmos 32, à segunda, 21 e da terceira subtrairmos 6?
Resp.: Aumentará de 47.

11. Efetue as seguintes subtrações:

80 — 6 =	2 545 — 1 234 =
127 — 9 =	12 478 — 4 507 =
5 000 — 3 999 =	11 900 — 4 599 =

12. A diferença entre dois números é 18; qual passará a ser se aumentarmos 7 ao minuendo?

13. Que acontece ao resto de uma subtração quando se soma 12 ao subtraendo?

14. A diferença entre dois números é 15. Se subtrairmos 19 ao subtraendo, qual passará a ser a diferença?

15. A diferença entre dois números é 151 e o maior dêles é 327. Qual é o outro?

16. Dois números somados dão 2 146; um dêles é 879. Qual é o outro?

17. O excesso de um número sôbre 432 é 217. Que número é êsse?

18. A diferença entre dois números é 325. Que alteração sofrerá ela se somarmos 32 ao minuendo e 12 ao subtraendo?

Resp.: Aumentará de 20.

19. A diferença entre dois números é 483. Se ao maior dêles somarmos 5 e do menor subtrairmos 12, qual passará a ser a diferença?

Resp.: 500.

20. Que número preciso subtrair de 1 583 para ter 625?

21. Se, numa subtração, somarmos 50 ao subtraendo que deveremos fazer com o minuendo, para não alterarmos o resto?

22. Li um livro de 542 páginas e outro com menos 48 páginas do que o primeiro. Quantas páginas li ao todo?

23. Por conta de uma dívida de Cr$ 4 560,00, paguei uma prestação de Cr$ 1 280,00 e outra de Cr$ 2 500,00. Quanto fiquei devendo?

24. A idade de um pai excede de 23 anos à do filho. Se êste nasceu em 1920, em que ano nasceu o pai?

25. José tem menos   anos que seu mano nascido em 1914. Em que ano nasceu José?

26. Qual o ano do nascimento do poeta Olavo Bilac se êle morreu em 1918 com 53 anos de idade?

27. Vendi por Cr$ 250 500,00 um automóvel que me havia custado Cr$ 183 750,00. Qual foi o meu lucro?

28. Por quanto devo vender um objeto que me custou Cr$ 285,30 se quero lucrar Cr$ 27,80?

29. Comprei um relógio por Cr$ 832,00 e gastei Cr$ 125,00 para consertá-lo. Quero revendê-lo apurando Cr$ 80,00 de lucro. Quanto devo pedir por êle?

30. João tem o mesmo número de selos que Antônio; se Antônio der 50 selos a João, quantos selos êste passará a ter mais do que Antônio?

Resp.: 100.

31. A que é igual a soma do maior número de três algarismos com o menor número de quatro algarismos?

Resp.: 1 999.

32. Duas pessoas têm a mesma quantia. Se uma der Cr$ 500,00 à outra, com quanto esta ficará mais do que a primeira?

33. Em que ano completará 51 anos uma pessoa nascida em 1923?

34. Se me derem Cr$ 325,00 eu ficarei com Cr$ 520,00. Quanto é que eu possuo?

35. Comprei um livro de Cr$ 35,00, um caderno de Cr$ 12,00 e um lápis. Paguei tudo com uma nota de Cr$ 100,00 e recebi Cr$ 51,50 de trôco. Qual o preço do lápis?

36. Para pagar Cr$ 628,00 dei três notas de Cr$ 200,00 e uma de Cr$ 50,00. Quanto me voltaram de trôco?

37. A diferença de dois números é 53. O maior dêles é 89. Qual é o menor?

38. O menor de dois números é 27 e a diferença entre êles é 24. Qual é o maior?

39. Ache a soma do minuendo, do subtraendo e do resto, sabendo que o minuendo é 173. Resp.: 346.

40. Nas subtrações abaixo, preencha com os algarismos adequados as ordens representadas por traços:

5 — 2 —	8 — 3 — 5	— 3 — 7 —
— 9 — 2	— 2 — 7 —	1 — 4 — 3
2 4 5 7	7 4 8 1 2	4 6 1 6 8

41. Três números somados dão 1 585. Um dêles é 1 325. Calcular os outros dois sabendo que são iguais.

42. Nas somas abaixo substitua os traços com os algarismos adequados:

3 — 2 5	— 3 — 5 —
6 — 8	— 6 — 9
1 3 —	6 1 7
4 2 4 2	5 8 9 8 8

43. Um cidadão romano nasceu no ano 32 antes de Cristo e faleceu no ano 41 da era cristã. Com que idade morreu?

44. Uma pessoa morreu no ano 25 depois de Cristo com a idade de 63 anos. Em que ano nasceu ela?

MULTIPLICAÇÃO

Multiplicação de um número inteiro por outro é a operação pela qual se toma como parcela o primeiro tantas vêzes quantas são as unidades do segundo. O primeiro número chama-se *multiplicando* e o segundo, *multiplicador*.

O resultado da multiplicação é o *produto*. O multiplicando e o multiplicador são *os fatôres* do produto.

O sinal da multiplicação é $\times$, que se lê *multiplicado por* ou *vêzes*. Assim 4×5 lê-se *quatro vêzes cinco* ou *quatro multiplicado por cinco*. É também usado o ponto como sinal de multiplicação; assim 4.5 é o mesmo que 4×5.

A multiplicação é um caso especial de soma — Da definição dada, vê-se que multiplicar 4 por 5 se reduz a formar uma soma de 5 parcelas iguais a 4, isto é,

$$4 \times 5 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4$$

A multiplicação pode ser considerada uma adição de parcelas iguais. Uma das parcelas iguais é o multiplicando, o número de parcelas é o multiplicador.

O multiplicando pode ser um número concreto ou abstrato; o multiplicador é sempre abstrato; o produto é da mesma espécie que o multiplicando.

Produto de dois números simples. Tabuada — Devemos saber de cor os produtos de dois números simples quaisquer. Êsses produtos estão na seguinte tabuada chamada de Pitágoras.

A construção desta tabuada é fácil.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Numa linha horizontal, escrevem-se os primeiros nove números; junta-se cada um dêsses números a si mesmo e obtêm-se nove números que em ordem de grandeza se escrevem numa segunda linha horizontal. Somando-se cada um dos números da primeira linha ao seu correspondente da segunda linha, obtém-se a terceira linha. Para formar a quarta, soma-se cada número da terceira linha com o seu correspondente na primeira e assim por diante.

O uso da tabuada é também mui fácil.

Seja procurar o produto de 5 por 7; procura-se 5 na primeira linha horizontal e, depois, procura-se 7 na primeira coluna, segue-se a coluna que principia com 5 até encontrar a linha que começa por 7. O número que se acha no cruzamento é o produto procurado; é 35.

OBSERVAÇÕES: I — O resultado da multiplicação seria o mesmo, se tivéssemos tomado 7 na primeira linha horizontal e 5 na primeira coluna à esquerda.

O cruzamento daria 35.

Donde se conclui:

$$5 \times 7 = 7 \times 5$$

isto é, *a ordem dos fatôres não altera o valor do produto*.

II — Quando um fator é 1, o produto é o outro fator. Exemplos: $3 \times 1 = 3$; $1 \times 7 = 7$.

III — Qualquer número multiplicado por 0 é igual a 0. Assim $5 \times 0 = 0$.

Produto de um número qualquer por outro simples — *Para multiplicar um número qualquer por outro número de um só algarismo, multiplicamos sucessivamente, indo da direita para a esquerda, cada algarismo do multiplicando pelo multiplicador. Se o produto o passar de 9, se o escreve; se passar, só se escrevem as unidades de cada produto parcial, conservando-se as dezenas para somar ao produto seguinte; opera-se assim até ao último produto, que é escrito por inteiro.*

Eis como se procede na prática: Seja multiplicar 436 por 7.

$$\begin{array}{r} 436 \\ 7 \\ \hline 3052 \end{array}$$

Escreve-se o multiplicando e, debaixo, o multiplicador; sublinha-se e diz-se: 7 vêzes 6, 42; escreve-se 2 na coluna das unidades e retém-se 4. Em seguida, diz-se: 7 vêzes 3, 21, com 4, 25; escreve-se 5 na coluna das dezenas e retém-se 2. Depois, diz-se: 7 vêzes 4, 28, com 2, 30, que se escreve. O produto é 3052.

OBSERVAÇÕES: I — Para multiplicar um número qualquer por outro formado de um algarismo significativo seguido de um ou mais zeros, basta multiplicar o multiplicando pelo algarismo significativo e escrever à direita do produto tantos zeros quantos há no multiplicador.

Seja multiplicar 326 por 400; multiplica-se 326 por 4 e no produto escrevem-se dois zeros à direita.

```
   326
   400
──────
130400
```

II — Quando um dos fatôres é 10, 100, 1000, etc., isto é, a unidade seguida de zeros, escreve-se o outro fator seguido do mesmo número de zeros.

Exemplos: $485 \times 1000 = 485000$
$100 \times 987 = 98700$

Produto de dois números quaisquer — *Para multiplicar dois números quaisquer, escreve-se o multiplicador em baixo do multiplicando, de modo que as unidades da mesma ordem se correspondam; multiplica-se, em seguida sucessivamente, principiando pela direita, todo o multiplicando por cada algarismo do multiplicador, tendo-se o cuidado de escrever o primeiro algarismo de cada produto parcial debaixo do algarismo que serviu de multiplicador; a soma dos produtos parciais fornece o produto procurado.*

Seja multiplicar 4527 por 354.

Eis a disposição prática da operação:

```
   4527   multiplicando
    354   multiplicador
  ─────
  18108   1.º produto parcial
 22635    2.º    »       »
13581     3.º    »       »
───────
1602558   Produto total.
```

OBSERVAÇÕES: I — Quando houver zeros intercalados no multiplicador, opera-se exatamente como no caso

precedente, sem atender aos zeros, havendo, porém, cuidado em colocar o primeiro algarismo do produto parcial debaixo do algarismo do multiplicador pelo qual se multiplica.

Seja multiplicar 400803 por 205005.

Dispõe-se a operação do modo seguinte:

```
     400803
     205005
───────────
    2004015
  2004015
 801606
───────────
82166619015
```

II — Quando ambos os fatôres terminam em zero, faz-se a multiplicação abstraindo-se dos zeros e depois, à direita do produto, escrevem-se todos os zeros dos fatôres.

Exemplo: Seja 124000×1200.

```
 124 (000)
  12 (00 )
 ─────────
 248
124
─────────
148800000
```

Produto de vários fatôres — Se tomarmos os números 4, 3, 5, 7, etc., e ligarmos êsses números pelo sinal de multiplicação, a expressão

$$4 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots\ldots$$

será um produto de vários fatôres.

Obtém-se êsse produto multiplicando 4 por 3, o resultado por 5, o novo resultado por 7... e assim sucessivamente até o último fator.

Exemplo:

$4 \times 3 \times 5 \times 7 = 12 \times 5 \times 7 = 60 \times 7 = 420.$

Entre as propriedades do produto de vários fatôres notam-se as seguintes:

1.º) *Em um produto de vários fatôres pode-se mudar a ordem dos fatôres, sem alterar o valor do produto;* assim:

$$4 \times 3 \times 5 \times 7 = 4 \times 5 \times 3 \times 7 = 7 \times 5 \times 3 \times 4$$

2.º) *Em um produto de muitos fatôres pode-se substituir dois ou mais fatôres pelo seu produto efetuado;* assim:

$$4 \times 3 \times 5 \times 7 = 4 \times 15 \times 7$$

Potenciação — *Potência* de um número é um produto de fatôres iguais a êsse número. Êste número é a *base* da potência.

Assim, 3×3; $3 \times 3 \times 3$; $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ são potências de 3.

O número de fatôres iguais é o *grau* da potência. Assim, 3×3 é a potência do 2.º grau ou 2.ª potência de 3; $3 \times 3 \times 3$ é a 3.ª potência de 3; $3 \times 3 \times 3 \times 3$ é a 4.ª.

A segunda potência de um número chama-se *quadrado* dêsse número e a terceira denomina-se *cubo*.

O quadrado de 6 é 6×6 ou 36; o cubo de 6 é $6 \times 6 \times 6$ ou 216.

Indica-se o grau de uma potência escrevendo à sua direita um pouco acima da base um número chamado *expoente*.

Exemplo: 6^3 exprime a 3.ª potência ou o cubo de 6. A base, nêsse caso, é 6; o expoente é 3. Lê-se 6 *elevado à terceira potência* ou 6 *elevado ao cubo*, ou, ainda, *cubo de* 6.

OBSERVAÇÕES: I — A primeira potência de um número é o próprio número; assim: $4^1 = 4$

II — Para calcular as potências sucessivas de um número basta calcular sucessivamente o produto de 2, 3, 4 5 etc., fatôres iguais a êsse número.

Exemplo: $7^2 = 7 \times 7 = 49$
$7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$
$7^4 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$

III — As potências de 10 são números formados da unidade seguida de tantos zeros quantas forem as unidades do expoente.

Assim:

$10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$; $10^4 = 10000$ etc.

DIVISÃO

Divisão é a operação pela qual se acha quantas vêzes um número chamado *dividendo* contém um outro chamado *divisor*.

Assim, dividir 24 por 6 é achar quantas vêzes o dividendo 24 contém o divisor 6; o resultado é o *quociente*, palavra de origem latina e que significa *quantas vêzes*.

Para achar o quociente de 24 por 6 basta, portanto, subtrair sucessivamente 6 de 24 e contar quantas vêzes foi possível essa subtração. O mesmo faríamos para dividir 26 por 6. Vejamos os dois casos

24		26
− 6	(1.ª subtração)	− 6
18		20
− 6	(2.ª subtração)	− 6
12		14
− 6	(3.ª subtração)	− 6
6		8
− 6	(4.ª subtração)	− 6
0		2

Em ambos os casos o dividendo contém o divisor 4 vêzes; isto é, o quociente é 4; mas no primeiro caso o

dividendo contém exatamente 4 vêzes o divisor, ao passo que no segundo caso, ficou um *resto*, 2. Diz-se que no 1.º caso a divisão é *exata;* no 2.º caso a divisão é *inexata* e 4 é o *quociente incompleto*.

A divisão exata pode ser considerada como a operação inversa da multiplicação. Com efeito: se em vez de subtrair sucessivamente 6 de 24, subtraíssemos 4 × 6, o resultado seria o mesmo. Assim, tudo se reduziria a achar um número que multiplicado por 6 desse 24.

Segunda definição — A divisão pode, pois, ser considerada como a operação em que se dá um produto de dois números (o dividendo) e um dêles (divisor) para se achar o outro (o quociente).

A divisão pode ainda ser definida como a operação pela qual se reparte um número dado em partes iguais.

Assim, se repartirmos 24 objetos igualmente por 6 pessoas cada uma receberá 4.

O sinal de divisão é :, que se lê *dividido por;* assim,

$$24 : 6 = 4$$

lê-se 24 *dividido por 6 é igual a 4.*

Em lugar de :, emprega-se o sinal ÷

Indica-se igualmente a divisão por um pequeno traço horizontal, escrevendo-se acima o dividendo e em baixo o divisor.

Exemplo: $\frac{24}{6}$ é o mesmo que 24 ÷ 6

OBSERVAÇÕES: I — O resto é sempre menor do que o divisor.

II — Na divisão exata, não há resto; também se diz que o resto é zero.

III — Na divisão exata, o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente (24 ÷ 6 = 4; 4 × 6 = 24).

IV — Quando a divisão não é exata, o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente incompleto e mais o resto (26 = 4 × 6 + 2).

V — O quociente da divisão de um número por 1 é o mesmo número. O quociente de qualquer número diferente de zero por si mesmo é igual a 1.

Os casos de divisão — Estudaremos os três casos seguintes de divisão:

1.º) O divisor tem um só algarismo e o dividendo é menor do que 10 vêzes o divisor, isto é, o divisor e o quociente são números simples;

2.º) O divisor é qualquer e o dividendo é menor do que 10 vêzes o divisor;

3.º) O divisor e o dividendo são números quaisquer.

Primeiro caso — Seja 78 a dividir por 8.

Pela tabuada de Pitágoras, sabe-se que 8 × 9 dá 72 e que 8 × 10 dá 80; logo, o quociente de 78 por 8 é maior do que 9 e menor do que 10. Portanto, o quociente incompleto é 9 e o resto é 78 — 72 ou 6.

Com efeito

$$78 = 8 \times 9 + 6$$

Segundo caso — *Para dividir um numero por outro, no caso em que o divisor é um número qualquer e o dividendo é menor do que dez vêzes o divisor, escreve-se o divisor à direita do dividendo, separando-os por um traço vertical; sublinha-se o divisor e escreve-se o quociente em baixo do divisor. Quando o dividendo e o divisor têm o mesmo número de algarismos, divide-se o primeiro algarismo do dividendo pelo primeiro do divisor; se o dividendo tem um algarismo a mais, divide-se o número formado pelos dois primeiros algarismos à esquerda do dividendo pelo primeiro algarismo à esquerda do divisor, e obtém-se o quociente. Multiplica-se, em seguida, todo o divisor por êsse algarismo e o produto subtrai-se do dividendo; se não fôr possivel a subtração, diminui-se sucessivamente o quociente de uma unidade, até que se tenha um produto igual ou inferior ao dividendo.*

Seja dividir 486 por 232.

Disponha-se o calculo do modo seguinte:

486	232
464	2
22	

486	232
22	2

Divide-se 4 por 2; acha-se 2. Para verificar se 2 é o quociente deve-se multiplicar 232 por 2, o que dá 464 e subtrair de 486, o que dá 22; logo, 2 é o quociente incompleto e 22 é o resto.

Na prática, faz-se a subtração mentalmente, dizendo: 2 vêzes 2, 4, para 6, 2; 2 vêzes 3, 6, para 8, 2; 2 vêzes 2, 4, para 4, 0.

Terceiro caso — *Para dividir um número qualquer por outro, escreve-se o divisor à direita do dividendo, separando-os por um traço vertical. Toma-se, em seguida, à esquerda do dividendo um número contendo o divisor pelo menos uma vez, porém, menos de dez vêzes. Divide-se êste dividendo parcial pelo divisor,* de acôrdo com a regra do 2.° caso; *obtém-se assim o primeiro algarismo do quociente. Multiplica-se o divisor por êste algarismo e tira-se o produto do dividendo parcial. À direita do resto escreve-se o algarismo seguinte do dividendo, para formar o segundo dividendo parcial, que, dividido pelo divisor dará o segundo algarismo do quociente. Continua-se do mesmo modo, até se exgotarem todos os algarismos do dividendo.*

O conjunto dos algarismos obtidos forma o quociente, que é escrito em baixo do divisor, e dêle separado por um traço horizontal.

Eis a disposição do cálculo:

Dividendo	954'7'0'	245	Divisor
	219 7		
	23 7 0	389	Quociente
Resto...	1 6 5		

OBSERVAÇÃO — Se o dividendo e o divisor terminarem em zeros, podemos cancelar em ambos o mesmo

número de zeros. O quociente será o mesmo da divisão dos números dados. O resto porém, se houver, virá dividido por 10, 100, 1000, etc., conforme tenhamos suprimido nos têrmos da divisão um, dois, três, etc., zeros.

Exemplo:

5000000	6400
52000	781
52000	
1600	

50000(00)	64(00)
520	781
080	
16	

O quociente, 781, não se alterou, mas o resto veio dividido por 100. De fato $1600 \div 100 = 16$.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

1. Que é multiplicação?
2. Organize a tabuada de Pitágoras.
3. Que sabe a respeito da ordem dos fatôres de um produto?
4. Que é *potência* de um número?
5. Que é *base* de uma potência? e expoente?
6. Que nomes especiais têm a segunda e a terceira potências de um número?
7. Como obter as potências sucessivas de um número?
8. Que sabe a respeito das potências de 10?
9. Calcule o quadrado de 18; o cubo de 15; a quarta potência de 7.
10. Nos produtos abaixo coloque os fatôres na ordem mais conveniente para o cálculo mental e dê os resultados:

$$2 \times 7 \times 9 \times 5 =$$
$$125 \times 11 \times 8 =$$
$$4 \times 93 \times 25 =$$

11. Calcule os produtos:

$$5^2 \times 2^3 \times 3 =$$
$$7^2 \times 10^3 \times 5 =$$
$$12^3 \times 5^2 \times 11 =$$

12. Que é divisão?
13. Quais são os casos de divisão de números inteiros?
14. Se cancelarmos no dividendo e no divisor o mesmo número de zeros, que sucederá ao quociente e ao resto da divisão?
15. Quantos minutos há em 5 horas?
16. Quantos segundos há em 2 horas e 3 minutos?

17. Quantos minutos há em 3 dias e 7 horas?

18. Quantas horas há em um ano bissêxto?

19. Um papeleiro ganha 80 cruzeiros em cada dúzia de livros. Quanto ganha em 3 grosas e 4 dúzias de livros?

20. Comprei 6 metros de renda a 42 cruzeiros cada metro e 8 metros de algodãozinho a 26 cruzeiros por metro. Dei para pagar uma nota de 1 000 cruzeiros. Qual foi o trôco?

21. Quanto valem 6 caixas de 15 latas de doces em calda, custando cada lata 18 cruzeiros?

22. O triplo da idade de Pedro é igual ao dôbro da idade de João, que está com dúzia e meia de anos. Que idade tem Pedro? Resp.: 12 anos.

23. Se aumentarmos um número de 180 obteremos o seu quíntuplo. Que número é êsse? Resp.: 45.

24. O produto de dois números é 128. Qual passará a ser o produto se multiplicarmos um dos fatôres por 3 e o outro por 5?

25. Que alteração sofrerá um produto de três fatôres se cada um dêles fôr multiplicado por 5?

26. O produto de dois números é 15 275. Se juntarmos 6 ao multiplicador, o produto passará a ser 17 225. Quais são os números? Resp.: 325 e 47.

27. A soma de dois números é 96. Um é o quíntuplo do outro. Quais são os dois números? Resp.: 16 e 80.

28. Aumentando-se um número de 565 obtém-se o seu sêxtuplo. Que número é êsse? Resp.: 113.

29. Quanto devo somar a 325 para obter o quádruplo dêsse número? Resp.: 975.

30. Quanto custam 3 dúzias e meia de compassos a Cr$ 15,00 cada compasso?

31. Num depósito entram 25 litros de água por minuto e dêle saem 11 litros no mesmo tempo. Quantos litros haverá no depósito ao fim de 17 horas e meia?

32. Cinco operários fazem certo trabalho em 17 horas. Se fôsse apenas um operário quanto tempo levaria para fazer o mesmo trabalho? Resp.: 85 horas.

33. Numa carteira estão três notas de mil cruzeiros, uma de quinhentos cruzeiros, cinco de cem cruzeiros e sete de dez cruzeiros. Que quantia contém a carteira?

34. Qual o número maior: o dôbro do cubo de 4 ou o quíntuplo do quadrado de 5?

35. Um automóvel e uma motocicleta partem do mesmo ponto e percorrem a mesma estrada, mas em sentidos opostos. O automóvel faz em média 42 quilômetros e a motocicleta 28 quilômetros por hora. Ao fim de 5 horas, que distância separa os dois veículos? Resp.: 350 quilômetros.

36. Dois números multiplicados dão 180. Qual é o produto do triplo de um dos números pelo dôbro do outro? Resp.: 1 080.

37. O produto de um número por 8 é 10 736. Qual é o produto do mesmo número por 40? Resp.: 53 680.

38. Que alteração sofre um produto de três fatôres quando se multiplica o primeiro por 5, o segundo por 3 e o terceiro por 4? Resp.: Fica multiplicado por 60.

39. Efetue os produtos

$43 \times 11 \qquad 425 \times 11 \qquad 4\,256 \times 11$

e procure descobrir uma regra para obter o produto de qualquer número por 11 sem efetuar a multiplicação.

40. Por quanto é preciso multiplicar 158 para que o produto seja 5 056?

41. Efetue as divisões:

$342\,700 \div 1\,500 =$

$465\,000 \div 3\,150 =$

$8\,640\,000 \div 12\,500 =$

42. Numa divisão exata o quociente é 15 e o dividendo 690. Qual é o divisor?

43. Qual o dividendo numa divisão em que o divisor é 18, o quociente é 21 e o resto o maior possível? Resp.: 395.

44. O dividendo é 1 546, o resto é 21 e o quociente, 61. Achar o divisor.

45. Dois números inteiros consecutivos somam 47. Que números são êsses?

46. Qual o maior número que se pode somar a um dividendo sem que o quociente se altere?

47. Numa divisão o divisor é 35 e o quociente, 127; o resto é o menor possível. Qual é o dividendo? Resp.: 4 446.

48. A soma de dois números é 572 e a diferença entre êles, 82. Quais são os números? Resp.: 327 e 245.

49. Numa divisão, o divisor é 51, o quociente é o triplo do divisor e o resto o menor possível. Qual é o dividendo? Resp.: 7 804.

50. Achar o dividendo sabendo que o quociente é 27 e que o resto 36 é o maior possível. Resp.: 1 035.

51. Paguei 4 540 cruzeiros com notas de 20 cruzeiros. Quantas notas tive de dar?

52. Dois meninos têm juntos 284 selos. Um tem mais 18 do que o outro. Quantos selos tem cada um? Resp.: 151 e 133.

53. O resto de uma divisão é 54 e o divisor, 320. Qual o maior número que se pode somar ao dividendo sem alterar o quociente? Resp.: 265.

54. Um número dividido por 7 diminuiu de 126. Que número é êsse? Resp.: 147.

55. As idades de pai e filho reunidas perfazem 82 anos. O pai tem mais 24 anos do que o filho. Qual a idade de cada um?

56. Dois números somados dão 125; o quociente do maior pelo menor é 5 e o resto o maior possível. Calcular os dois números.

Resp.: 18 e 107.

57. Numa divisão, o quociente é 15 e o resto 31. Achar o dividendo sabendo que o divisor é o menor possível. Resp.: 511.

58. Ao fazer uma multiplicação, escreveu-se o multiplicador 732 em vez de 723. Sabe-se que o produto aumentou de 1 422 unidades. Qual era o multiplicando?

Resp.: 158.

PROVAS REAIS DAS QUATRO OPERAÇÕES

Prova de uma operação é uma segunda operação que serve para verificar a exatidão da primeira.

As provas não fornecem certeza absoluta de exatidão ou de êrro, pois não só estamos arriscados a errar na prova, como pode-se dar na prova um êrro que compense outro cometido na primeira operação. Em todo caso, as provas dão probabilidades de exatidão.

Há diversas provas para cada uma das operções aritméticas. Veremos, por enquanto, a *prova real* de cada uma.

ADIÇÃO

Para tirar a prova da soma, basta somar as parcelas em ordem diferente. Assim, por exemplo, se da primeira vez houvermos somado de cima para baixo, bastará que somemos de baixo para cima. Se o resultado fôr o mesmo, provavelmente a operação estará certa.

Com efeito, vimos que a ordem das parcelas não altera a soma; como, porém, as somas parciais são diferentes nos dois casos, é provável que qualquer êrro cometido na primeira operação não se reproduza na segunda.

SUBTRAÇÃO

Para tirar a prova da subtração, soma-se o resto com o subtraendo. Se o resultado fôr igual ao minuendo, a subtração deve estar certa.

MULTIPLICAÇÃO

Para tirar a prova da multiplicação, troca-se a ordem dos fatôres e efetua-se a multiplicação. Os resultados devem ser iguais.

Operação primitiva	Prova
453	562
562	453
906	1686
2718	2810
2265	2248
254586	254586

De fato, vimos que a ordem dos fatôres não altera o valor do produto. Mas, como os produtos parciais são diferentes nos dois casos, é provável que qualquer êrro cometido na primeira operação não se reproduza na segunda.

DIVISÃO

Multiplica-se o divisor pelo quociente e soma-se o resto, se houver.

Operação		Prova
434	28	15
154		× 28
14	15	120
		30
		420
		+ 14
		434

A divisão estará provàvelmente certa se o resultado fôr igual ao dividendo.

EXPRESSÕES ARITMÉTICAS

Os candidatos ao curso ginasial, além dos exercícios propostos no texto sôbre cada ponto do programa, devem praticar a resolução de pequenas expressões. Indicaremos abaixo a marcha a seguir nos casos mais simples.

1.º Exemplo: Calcular a expressão:

$$18 - 5 - 3 + 12 - 7 + 8$$

Neste caso, em que só há somas e subtrações, somam-se o primeiro têrmo (18) e os que estão precedidos do sinal +; acha-se

$$18 + 12 + 8 = 38$$

Em seguida, somam-se separadamente os têrmos que estão precedidos do sinal —; acha-se

$$5 + 3 + 7 = 15$$

Por fim, subtrai-se a segunda soma da primeira. Acha-se

$$38 - 15 = 23$$

que é o resultado da expressão.

Na prática, indica-se assim:

$$18 - 5 - 3 + 12 - 7 + 8 = (18 + 12 + 8) - (5 + 3 + 7) = 38 - 15 = 23.$$

2.º Exemplo: Calcular a expressão:

$$5 \times 3 + 39 \div 13 - 20 + 80 \div 2^4$$

Neste caso, efetuam-se primeiramente as potenciações, as multiplicações e as divisões. Acha-se:

$5 \times 3 = 15$ $\quad 39 \div 13 = 3$ $\quad 2^4 = 16$ $\quad 80 \div 16 = 5$

Substituindo, na expressão dada, estas operações pelos respectivos resultados, vem:

$$15 + 3 - 20 + 5$$

Aplicando, agora, a marcha do exemplo anterior, acha-se 3 para valor da expressão.

3.º Exemplo: Resolver a expressão:

$$15 - (8 \times 4 + 5 - 12) + 70 \div 2 - 18$$

Nestes casos, efetuam-se primeiramente as operações contidas no parêntesis, como se constituíssem uma expressão à parte. Acha-se:

$$8 \times 4 + 5 - 12 = 25$$

Substitui-se, em seguida o parêntesis pelo valor achado, isto é, por 25, e recai-se, então, num dos casos anteriores. Vem

$$15 - 25 + 70 \div 2 - 18$$

expressão que já sabemos calcular. O resultado é 7.

4.º Exemplo: Resolver a expressão:

$$15 \div 5 - [16 + 3 (7 - 2 \times 6 + 13) - 30] + 12 \times 3$$

Resolve-se, neste caso, o parêntesis e depois as operações da chave. O valor do parêntesis é:

$$7 - 2 \times 6 + 13 = 7 - 12 + 13 = 8$$

Substituindo o parêntesis pelo seu valor achado, a expressão contida na chave passa a ser:

$$16 + 3 \times 8 - 30 = 10.$$

Finalmente, substitui-se na expressão dada a chave pelo seu valor. Vem:

$$15 \div 5 - 10 + 12 \times 3$$

expressão que, resolvida, dá 29.

Na prática, dá-se a disposição abaixo:

$$15 \div 5 - [16 + 3 (7 - 2 \times 6 + 13) - 30] + 12 \times 3 =$$
$$= 15 \div 5 - [16 + 3 \times 8 - 30] + 12 \times 3 =$$
$$= 15 \div 5 - 10 + 12 \times 3 = 3 - 10 + 36 = 29$$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

(4 operações)

1. Divida Cr$ 7,50 entre duas pessoas de modo que uma receba o dôbro do que receber a outra. Resp.: Cr$ 5,00 e Cr$ 2,50.

2. Dois livros têm juntos 820 páginas, sendo um com um têrço das páginas do outro. Quantas páginas tem cada livro?
Resp.: 205 e 615.

3. O maior de dois números é o triplo do outro. A diferença entre êles é 8. Quais são os números? Resp.: 12 e 4.

4. Qual é o número cujo quádruplo mais o triplo dá 490?

5. O triplo da soma de dois números é 150 e o dôbro da diferença entre êles é 36. Que números são êsses? Resp.: 34 e 16.

6. Repartir Cr$ 3 250,00 entre três pessoas, de sorte que a 2.ª receba o triplo da 1.ª e a 3.ª o dôbro da 2.ª.
Resp.: Cr$ 325,00; Cr$ 975,00; Cr$ 1 950,00.

7. Dois números inteiros consecutivos somam 57. Quais são os números? Resp.: 29 e 28.

8. Três números inteiros consecutivos somam 168. Quais são êsses números? Resp.: 55, 56 e 57.

9. Os dois algarismos de um número somam 14; o das dezenas excede de 4 o das unidades. Que número é êsse? Resp.: 95.

10. Num terreiro há galinhas e coelhos, ao todo 84 pés e 27 cabeças. Quantas são as galinhas e quantos os coelhos?
Resp.: 12 galinhas e 15 coelhos.

11. Um pai tem 33 anos e seu filho, 5. Daqui a quantos anos será a idade do pai o triplo da do filho? Resp.: Daqui a 9 anos.

12. Um professor tem 53 anos e seu aluno, 17. Há quanto tempo foi a idade do mestre o quádruplo da do discípulo? Resp.: Há 5 anos.

13. Quatro números ímpares sucessivos somam 112. Quais são os números? Resp.: 25, 27, 29 e 31.

14. A quantia de Cr$ 3 300,00 foi paga com notas de Cr$ 200,00 e de Cr$ 50,00, ao todo 30 notas. Quantas notas eram de cada valor?
Resp.: 12 notas de Cr$ 200,00 e 18 de Cr$ 50,00.

15. Achar dois números sabendo que sua soma é 855 e que o quociente do maior pelo menor é 56. Resp.: 840 e 15.

16. Numa divisão o resto é 23; o divisor, o menor possível é igual à metade do quociente. Qual é o dividendo? Resp.: 1 175.

17. O quíntuplo de um número acrescido do seu quádruplo é 3 645. Qual é êsse número? Resp.: 405.

18. Um caderno e um lápis reunidos custam Cr$ 28,00. O livro custa mais Cr$ 22,00 do que o caderno. Quanto custa cada objeto?

19. Achar o número que multiplicado por uma dúzia fica aumentado de 704 unidades. Resp.: 64.

20. Um vendedor de aves ambulante pretendia vender cada ave a Cr$ 32,00. No trajeto, descuidando-se deixou que 10 aves escapassem, voando. Para não ter prejuízo teve de vender cada uma das restantes por Cr$ 40,00. Quantas aves eram a princípio e qual o total apurado na venda? Resp.: 50 aves; Cr$ 1 600,00.

21. Se um livreiro puser 60 livros em cada caixa, sobrarão 20 livros, mas se puser 70, ficará na última caixa lugar para 100 livros. Quantas são as caixas e quantos os livros?
Resp.: 12 caixas; 740 livros.

22. Às 3 horas sai da estação ferroviária um trem com a velocidade de 56 km por hora e às 4 horas e meia sai outro trem fazendo 63 km por hora e percorrendo o mesmo trajeto do primeiro. A que horas o segundo trem alcança o primeiro e a que distância da estação de partida? Resp.: 16 ½ horas; 756 km.

23. Um homem tinha 21 anos quando lhe nasceu o primeiro filho. Atualmente o pai tem o quádruplo da idade do filho. Que idade tem êste? Resp.: 7 anos.

24. Um operário ganha Cr$ 120,00 por dia que comparece ao serviço e paga multa de Cr$ 50,00 cada dia que falta. Passados 20 dias recebeu Cr$ 1 890,00. Quantos dias deixou de comparecer?
Resp.: 3 dias.

25. Acrescentando um zero à direita de um número êle aumentou de 5 328. Qual era o número? Resp.: 592.

26. Acrescentei dois zeros à direita de um número e êle aumentou de 1 287 unidades. Qual era o número? Resp.: 13.

27. À direita de um número acrescentei o algarismo 3 e êle ficou aumentado de 1 884 unidades. Qual era o número? Resp.: 209.

28. Comprei um objeto por Cr$ 5 820,00. Dei uma entrada de Cr$ 600,00 e fiquei pagando o restante em 12 prestações. Qual o valor de cada prestação?

29. Quanto ganha por hora um operário que, em 12 dias, trabalhando 7 horas por dia, percebeu Cr$ 1 764,00?

30. Os três números de uma subtração somados dão 2 192. Achar êsses números sabendo que o minuendo é o quádruplo do resto.
Resp.: 1 096; 822 e 274.

31. Numa divisão, o quociente 135 é igual à soma do divisor com o resto, sendo êste o maior possível. Pede-se o dividendo.
Resp.: 9 247.

32. Três números pares sucessivos somam 60. Quais são os números? Resp.: 18, 20 e 22.

33. Complete as igualdades:

23 280 = 51 × * + 24
7 584 = 102 × 74 + *
17 832 = 320 × 56 — *

34. Para numerar as páginas de um álbum um desenhista pediu Cr$ 3,00 por algarismo. Ao terminar o trabalho recebeu Cr$ 594,00. Quantas páginas tinha o álbum? Resp.: 102 págs.

35. João tem o dôbro da idade de Pedro. Daqui a 9 anos as idades de ambos somadas darão 54 anos. Que idade tem João?
Resp.: 24 anos

36. Comprei igual número de lápis e de cadernos, êstes a Cr$ 1,80 e aquêles a Cr$ 5,40. Paguei Cr$ 230,40. Qual o número de lápis e cadernos adquiridos? Resp.: 32.

37. A quantia de Cr$ 300,00 foi paga em cédulas de Cr$ 10,00 e de Cr$ 5,00, sendo estas em número duplo do das outras. Quantas cédulas de cada valor eram?
Resp.: 15 cédulas de Cr$ 10,00 e 30 de Cr$ 5,00.

38. O quádruplo da soma de dois números é 148 e o quíntuplo da diferença entre êles é 15. Quais são êsses números? Resp.: 20 e 17.

39. Acrescentando-se o algarismo 7 à direita de um número, êle fica aumentado de 2 959 unidades. Que número é êsse? Resp.: 328.

40. Comprei 5 frangos e 3 patos por Cr$ 430,00. Se fôssem 5 patos e 5 frangos teria pago Cr$ 610,00. Qual o preço de cada ave?
Resp.: Cr$ 32,00 cada frango e Cr$ 90,00 cada pato.

41. Complete as igualdades

$6 \times 1^{15} =$

$2 \times 10^{8} =$

$2^{2} \times 3^{5} =$

$3^{2} \times 5^{3} =$

$5^{2} + 3^{4} - 2^{3} =$

$2^{3} \times 3^{2} \times 5 \times 1^{10} =$

42. A diferença entre dois números é 48. O maior é o quádruplo do menor e mais 6. Quais são os números? Resp.: 62 e 14.

43. Um capitalista queria distribuir a quantia que trazia na carteira entre seus pobres e verificou que se desse 250 cruzeiros a cada um, ainda lhe sobrariam 100 cruzeiros, mas para dar 260 cruzeiros a cada um faltavam-lhe 300 cruzeiros Quantos eram os pobres e que quantia trazia na carteira o capitalista?
Resp.: 30 pobres; Cr$ 7 500,00.

44. Resolva as expressões:

$5^{2} - 3^{2} \times 2^{5} \div 2^{3} + 7 \times 5 - 11 =$ Resp.: 23.

$5\ (9 \times 55 \div 5 - 3^{2} \times 2) - (35 \times 2 \div 7 \times 12 - 15) =$ Resp.: 3.

$2\ [65 \div 13 + (3 \times 7 - 5 + 8) - 120 \div 5] =$ Resp.: 10.

DIVISIBILIDADE. PROVA DOS NOVES

Um número é *divisível* por outro quando sua divisão por êste outro se faz exatamente.

Assim, 42 é divisível por 7, porque o quociente da divisão de 42 por 7 dá 6 exatamente.

O número divisível por outro é chamado *múltiplo* dêste outro. Ex.: 42 é múltiplo de 7.

O número que divide exatamente outro chama-se *submúltiplo, divisor* ou *fator* dêste outro. Assim, 7 é submúltiplo, divisor ou fator de 42.

Um número pode ser, ao mesmo tempo, múltiplo de dois ou mais números. Assim, 42 é múltiplo de 6 e de 7; também é múltiplo de 2, 3, 14.

Inversamente, 2, 3 e 7 são fatôres, divisores ou submúltiplos de 42.

Todos os números são múltiplos de 1; logo, 1 é fator comum a todos os números.

Caracteres de divisibilidade — *Caracteres de divisibilidade* são condições simples que permitem reconhecer se um número é divisível por outro e, no caso de não ser, permitem dizer qual é o resto da divisão sem efetuar esta operação.

Divisibilidade por 10 — *Um número é divisível por 10, quando termina em zero.*

Assim, 60, 70, 800 são divisíveis por 10.

Se o número não terminar em zero, não será divisível por 10, e o resto da divisão é o algarismo das unidades.

Exemplo: 597 não é divisível por 10; o resto da divisão de 597 por 10 é 7.

Divisibilidade por 2 — *Um número é divisível por 2, quando o seu último algarismo é 2, 4, 6, 8, ou 0.*

O resto de uma divisão é menor do que o divisor; logo, o resto de uma divisão por 2 só pode ser 1. Com

efeito, os números terminados em 1, 3, 5, 7 e 9 não são divisíveis por 2, e o resto das respectivas divisões por 2 é 1.

O número divisível por 2, chama-se *par;* e o não divisível por 2, chama-se *impar*.

Divisibilidade por 5 — *Um número é divisivel por 5 quando o último algarismo é 0* ou *5*.

Exemplo: 80 e 65 são números divisíveis por 5.

O número cujo último algarismo não é 5, nem zero, não é divisível por 5, e o resto da divisão dêsse número por 5 é o mesmo que o resto da divisão do número representado pelo último algarismo por 5.

Exemplo: 79 não é divisível por 5; o resto da divisão de 79 por 5 é o mesmo que o de 9 por 5, é 4.

Divisibilidade por 9 — *Para que um número seja divisivel por 9 é necessário e suficiente que a soma dos valores absolutos dos seus algarismos seja divisivel por 9.*

Exemplo: o número 4563 é divisível por 9, porque a soma dos valores absolutos dos algarismos é divisível por 9. Com efeito, $4 + 5 + 6 + 3 = 18$, e 18 é divisível por 9.

Quando a soma dos algarismos não é divisível por 9, o número não é divisível por 9, e o resto da divisão do número é o mesmo que o da soma dos valores absolutos dos algarismos por 9.

Exemplo: o número 5621 não é divisível por 9, porque $5+6+2+1=14$ não é divisível por 9. O resto da divisão de 5621 por 9 é o mesmo da divisão de 14 por 9; é 5.

Divisibilidade por 3 — *Um número é divisivel por 3 quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos for divisivel por 3;* se a soma dos algarismos não fôr divisível por 3, o número também não o será, e o resto da divisão do número por 3 será o mesmo da divisão daquela soma por 3.

Assim, 183 é divisível por 3, porque $1 + 8 + 3 = 12$, e 12 é divisível por 3; 142 não é divisível por 3, porque a soma dos seus algarismos é 7, que não é divisível por 3, e o resto de 142 por 3 é o mesmo resto da divisão de 7 por 3, é 1.

PROVA DOS NOVES

Tirar os noves — Chama-se *tirar os noves* de um número determinar o resto da divisão dêsse número por 9, o que já sabemos fazer (veja, pág. 40).

Na prática, em vez de somarmos todos os algarismos do número, desde que a soma de dois ou mais algarismos atinja 9 ou um número maior do que 9, verificamos o resto dessa soma e somamo-lo com o algarismo seguinte; e assim por diante, até que acabem todos os algarismos. Feita assim, parceladamente, a soma dos algarismos nunca atinge duas vêzes nove e verificar o resto por 9 corresponde sempre a tirar 9.

Exemplo: tirar os noves do número 8758. Diz-se: 8 e 7, 15, nove fora 6; 6 e 5, 11, nove fora, 2 e 8, 10, nove fora 1, que é o resto da divisão de 8758 por 9.

Prova dos noves da adição — Tiram-se os noves das parcelas, como se elas formassem um número só, e tiram-se, à parte, os noves da soma; se a operação estiver certa, os dois resultados devem ser iguais.

Seja a soma $745 + 687 + 38$

Operação	Prova
745	
687	
38	3
1470	3

Tirando-se os noves das parcelas, vem: 7 mais 4, 11, nove fora 2, mais 5, 7, mais 6, 13, nove fora 4, mais 8, 12, nove fora 3, mais 7, 10, nove fora 1, mais 3, 4, mais 8, 12, nove fora 3.

Tirando-se os noves da soma, vem: 1 mais 4, 5, mais 7, 12, nove fora 3.

Como os dois resultados são iguais, é provável que a adição esteja certa.

Prova dos noves da subtração — Tiram-se os noves da soma do subtraendo com o resto, e tiram-se separadamente os noves do minuendo. Os dois resultados devem ser iguais, se a operação estiver certa.

Seja a subtração 45632 — 12953

Operação	Prova
45632	
12953	2
32679	2

Tirando-se os noves da soma do subtraendo com o resto, acha-se 2; tirando-se os noves do minuendo, acha-se 2. Logo, a subtração deve estar certa.

Prova dos noves da multiplicação — Para fazer a prova dos noves da multiplicação tiram-se separadamente os noves do multiplicando e do multiplicador; faz-se o produto dos dois restos achados e tiram-se os noves dêsse produto. Se a operação estiver certa, êste último resto deve ser igual ao resto que se obtém tirando os noves do produto dos números dados.

Exemplo: 425 × 732. Na prática, dá-se a disposição seguinte:

Operação	Prova
425	
732	2 | 6
850	3 | 6
1275	
2975	
311100	

Traçam-se duas retas perpendiculares; à esquerda, no ângulo de cima, escreve-se o resto do multiplicando; no de baixo, o resto do multiplicador; à direita, no ângulo de cima, escreve-se o resto do produto dos restos dos fatôres, e no ângulo de baixo, o resto do produto dos números dados.

Assim, no exemplo acima: o resto do multiplicando é 2 e o do multiplicador é 3; o produto dêstes dois restos dá 6, cujo resto é 6 mesmo. Tirando-se os noves do produto, acha-se 6. Logo é provável que a multiplicação esteja certa.

Prova dos noves da divisão — Tiram-se os noves separadamente do divisor e do quociente incompleto; em seguida multiplicam-se os restos obtidos e tiram-se os noves do resultado. O número obtido é somado ao que resulta dos noves fora do resto da divisão e tiram-se também os noves desta soma. O número assim obtido deve ser igual ao que se obtém tirando os noves do dividendo.

Seja a divisão 845 ÷ 32 e vejamos a disposição geralmente usada.

Operação		Prova
845	32	8
205		—
13	26	8

Tirando-se os noves de 32 e de 26, acham-se respectivamente 5 e 8, que multiplicados dão 40, noves fora 4. Tirando-se os noves do resto da divisão, 13, acha-se 4, que somado a 4 dá 8. Tirando-se os noves do dividendo, acha-se 8. Os dois resultados coincidem; logo, é provável que a divisão estaja certa.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

1. Que é divisor de um número e que outros nomes se lhe dá?
2. Que são *caracteres de divisibilidade?*
3. Qual o caráter de divisibilidade por 2?
4. Quando é que um número se diz divisível por 5?
5. Qual o caráter de divisibilidade por 10?
6. Que é necessário para que um número seja múltiplo de 3?
7. Enuncie o caráter de divisibilidade por 9.

8. Diga quais os quatro menores números múltiplos de 30.

9. Cite quatro múltiplos de 3 compreendidos entre 20 e 32.

10. Quais os múltiplos de 9 compreendidos entre 60 e 100?

11. Ache o resto da divisão da soma

$$5\,431 + 248 + 35$$

por 9 sem efetuar as operações indicadas.

12. Ache o resto da divisão do produto

$$5\,847 \times 246$$

por 9 sem fazer o produto nem a divisão.

13. Sem fazer a divisão, ache os restos da divisão de 4 527 por 2, por 5, por 10, por 3 e por 9.

14. Como podem terminar os números que divididos por 5 deixam resto 3?

15. Que algarismos podem substituir a letra *a* de modo que:

32 *a* 5	seja divisível por 9	Resp.: 8.
5 4 6 *a*	seja divisível por 2	Resp.: 2, 4, 6, 8 ou 0.
6 *a* 40	seja divisível por 3	Resp.: 2, 5 ou 8.
4 2 7 *a*	seja divisível por 5	Resp.: 5.
75 2 *a*	seja divisível por 10	Resp.: 0.

16. Qual o menor número que se deve somar a 437 para ter um múltiplo de 9?

17. Qual o menor número que se deve subtrair de 6 583 para ter um múltiplo de 10?

18. Qual o menor número que se deve somar a 5 327 para obter-se um múltiplo de 4; e qual o menor que se deve subtrair para o mesmo fim?

19. Quais os menores números a somar ou subtrair de 3 824 para se ter um múltiplo de 9?

20. Quais os números compreendidos entre 60 e 80 que divididos por 5 deixam resto 2?

21. Qual o maior valor que se pode dar à letra *a* para que o número 5*a*24 seja divisível por 3? Resp.: 7.

22. Cite um número de três algarismos divisível ao mesmo tempo por 2, por 3 e por 5.

23. Forme um número de quatro algarismos divisível ao mesmo tempo por 5, por 2 e por 9.

24. Cite um número de dois algarismos múltiplo ao mesmo tempo de 9 e de 10.

25. Substitua *a* e *b* no número 5*a*3*b* de modo que êle se torne divisível ao mesmo tempo por 10 e por 9. Resp.: $a = 1$; $b = 0$.

26. Quais são os números que divididos por 5 deixam resto 4?

27. Substitua os asteriscos nos números seguintes de modo que:

8 3 2 *	dividido por 5 deixe resto 1	Resp.: 1 ou 6.
5 7 3 *	dividido por 3 deixe resto 2	Resp.: 2, 5 ou 8.
7 3 2 *	dividido por 4 deixe resto 3	Resp.: 3 ou 7.
6 * 4 9	dividido por 9 deixe resto 5	Resp.: 4.
3 2 7 *	dividido por 10 deixe resto 8	Resp.: 8.

28. Escreva o valor de *a* para que o número 61*a*80 seja divisível ao mesmo tempo por 9 e por 5. Resp.: 3.

29. Qual o menor número a ser subtraído de 5 327 para se obter um número divisível ao mesmo tempo por 2 e por 3? Resp.: 5.

NÚMEROS PRIMOS. DECOMPOSIÇÃO DE UM NÚMERO EM FATÔRES PRIMOS

Número primo e número múltiplo — Número primo é aquêle que só é divisível por si e pela unidade. Exemplo: 2, 3, 5, 7 são números primos.

O número não primo, isto é, o número que é divisível por outros diferentes de si e da unidade, chama-se *múltiplo* ou *composto*. Assim 20, 36, 54 são números múltiplos. Com efeito: 20, por exemplo, além de ser divisível por 20 e por 1, é divisível por 2 por 4, por 5 e por 10.

Os números que dividem outro exatamente se dizem *divisores* ou *fatôres* dêsse outro. Assim, 2, 4, 5 são fatôres ou divisores de 20.

São os seguintes os números primos menores do que 100:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Como reconhecer se um número é primo — Conhecidos os primeiros números primos, é fácil verificar se um número dado é primo ou não, contanto que o número dado não seja muito alto. Divide-se o número dado sucessivamente pelos números primos já conhecidos (2, 3, 5, 7, 11, 13, etc.) até encontrar uma divisão exata (caso em que o

número é múltiplo ou composto), ou uma divisão inexata em que o quociente seja igual ou menor do que o divisor; nêste último caso o número dado é primo.

Exemplo: verificar se 433 é primo. Dividindo-se sucessivamente por 2, 3, 5, 7... até 23, nenhuma dessas divisões é exata. Como o quociente de 433 por 23 já é inferior a 23, podemos garantir que aquêle número é primo (*).

Decomposição de um número em fatôres primos — Todo número que não seja primo é igual a um produto de números primos. Assim, por exemplo, 10, que é um número múltiplo, é igual a 2 × 5; 210, que também é um número múltiplo, é igual a 2 × 3 × 5 × 7; e assim por diante.

Decompor um número em seus fatôres primos é determinar quais os números primos que multiplicados entre si reproduzem o número dado.

Decompõe-se um número em seus fatôres primos dividindo-o sucessivamente por cada um dos números primos, enquanto fôr divisível, até obter-se para quociente a unidade.

Seja o número 2100 que teremos de decompor em fatôres primos.

Dividindo-o por 2 teremos para quociente 1050; dividindo 1050 ainda por 2, teremos 525; como 525 não é mais divisível por 2, experimentemos o divisor 3; aplicando o caráter de divisibilidade por 3, verificamos que 525 é divisível por 3; achamos para quociente 175; como 175 não é mais divisível por 3, dividimo-lo por 5, pois acabando êle em 5, é divisível por 5; achamos para quociente 35; dividindo 35 por 5, teremos 7; sendo 7 um número

(*) No curso ginasial se ensinará como formar uma tábua de números primos

primo, só poderemos dividi-lo por 7; teremos para quociente a unidade.

2100	2
1050	2
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

A disposição do cálculo geralmente usada é a que se vê à esquerda; escrevem-se os divisores à direita de um traço e os quocientes à esquerda, abaixo dos dividendos.

Os fatôres primos de 2100, são, portanto, 2, 2, 3, 5, 5, e 7. Se fizermos o produto dêsses números primos, encontraremos 2100. Com efeito:

$$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 2100$$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

1. Que é número primo? Dê exemplos.

2. Que é número composto ou múltiplo?

3. Como se pode reconhecer se um número é primo?

4. Decomponha em seus fatôres primos os números:

3 027 431 169 6 450 3 724 9 400

5. Verifique entre os números seguintes quais os que são primos:

301 107 209 163 149 853 923

6. Qual o menor número que se precisa somar a 91 para ter um número primo? Resp.: 6.

7. Quais os números primos compreendidos entre 40 e 60? Resp.: 41, 43, 47, 53 e 59.

8. Quantos números primos há entre 30 e 50? Resp.: 5.

9. Decomponha 6 450 e 3 750 em fatôres primos e diga quais os que são comuns aos dois números.

10. O número 3 725 é divisível por 17?

11. Quais são os três menores múltiplos de 19?

12. Quais os três maiores divisores de 60? Resp.: 60, 30 e 20.

13. Cite três números que sejam primos entre si dois a dois, não o sendo, entretanto, no seu conjunto.

14. Quais os fatôres primos comuns aos números 320, 360 e 240?

15. Decomponha em fatôres primos o produto, sem efetuá-lo:

$$40 \times 65 \times 125.$$

16. Decomponha em fatôres primos o quadrado de 140.

Resp.: $2^4 \times 5^2 \times 7^2$.

17. Calcule os valores de x, y, z e t sabendo que

$$x = 2^2 \times 3 \times 5^3$$

$$y = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$$

$$z = 3 \times 5^3 \times 11$$

$$t = 2 \times 5^2 \times 11 \times 13.$$

18. Ache a soma dos números primos compreendidos entre 20 e 40.

Resp.: 120

19. Qual o menor número primo que não é divisor de 330?

Resp.: 7.

20. Quatro múltiplos consecutivos de 7 somados dão 266. Quais são êsses múltiplos?

Resp.: 56, 63, 70 e 77.

MÁXIMO DIVISOR COMUM E MENOR MÚLTIPLO COMUM

MÁXIMO DIVISOR COMUM

Dados dois números pode acontecer que ambos sejam divisíveis por um ou por vários outros números diferentes da unidade. Exemplo: os números 120 e 150 são ambos divisíveis por 2, por 3, por 5, por 10, por 15 e por 30. Dizemos que êstes números são *divisores* ou *fatôres comuns* a 120 e a 150. Por sua vez, 120 e 150 são *múltiplos comuns* de 2, 3, 5, 10, 15, e 30.

Se dois números só tiverem para divisor comum a unidade, êles se dizem *primos entre si*. Exemplo: 48 e 49 são números primos entre si, pois êles não têm senão a unidade para fator comum.

É evidente que dois números primos quaisquer são sempre primos entre si, porque cada um dêles só é divisível por si e pela unidade; logo, o único divisor comum entre êles é a unidade.

Maior divisor comum a dois números — Como a própria expressão está dizendo, *máximo divisor comum a dois números* é o maior de todos os números que dividem os dois ao mesmo tempo.

Exemplo: entre 350 e 450 há vários divisores comuns (2, 5, 10 etc.) mas 50 é o maior divisor comum. Com efeito, pode haver números maiores do que 50 que dividam 350 (70, 175, por exemplo); pode haver números maiores do que 50 que dividam 450 (90 e 150, por exemplo); mas não há nenhum maior do que 50 que os divida a ambos ao mesmo tempo.

A abreviatura de maior divisor comum é *m.d.c.*

Regra para achar o m.d.c. a dois números — Para obter o maior divisor comum a dois números dados, pro-

cede-se da seguinte forma: *Divide-se o maior dos números pelo menor; se não houver resto, o maior divisor comum será o menor dos números dados; se houver resto, divide-se o menor por êste resto; se esta segunda divisão for exata, o resto será o maior divisor comum; se não fôr, divide-se o primeiro resto pelo segundo, e assim em seguida, até que se obtenha um resto nulo. O último divisor empregado será o maior divisor comum procurado.*

1.º Exemplo: Procurar o m.d.c. a 600 e 200.

Como 200 divide 600 exatamente, 200 é o m.d.c. Com efeito, um número maior do que 200 poderia dividir 600, mas não dividiria 200.

Assim, sempre que o menor dos números dados dividir o maior, o menor número será o maior divisor comum.

8.º Exemplo: Procurar o m.d.c. a 1868 e 456.

A disposição de cálculo geralmente usada é a seguinte:

	4	10	2	1	3
1868	456	44	16	12	4
44	16	12	4	0	

Divide-se 1868 por 456; o quociente é 4 e o resto, 44. Em seguida, divide-se 456 por 44; o quociente é 10 e o resto, 16. Depois, divide-se 44 por 16; o quociente é 2 e o resto, 12. Continua-se dividindo 16 por 12; acha-se para quociente 1 e para resto, 4. Finalmente divide-se 12 por 4; a divisão é exata; 4 é, portanto, o maior divisor comum procurado.

OBSERVAÇÃO — Quando se obtém para maior divisor comum a unidade, os dois números são primos entre si. Assim, se procurássemos o maior divisor comum entre 163 e 25, obteríamos a unidade e, então, concluiríamos serem 163 e 25 primos entre si. Vejamos.

	6	1	1	12
163	25	13	12	1
13	12	1	0	

M.D.C. a três ou mais números — *Para achar o m.d.c. a três ou mais números, procura-se o maior divisor comum a dois dos números dados; em seguida o maior divisor comum entre o maior divisor achado e o terceiro dos números dados; depois, o maior divisor comum entre o segundo maior divisor comum achado e o quarto número, e assim até o último número. O maior divisor comum dos números dados é o último dos maiores divisores comuns obtidos.*

Seja achar o maior divisor comum aos números 40, 180, 250, e 300.

Procura-se o maior divisor comum a 40 e 180; é 20. Depois entre 20 e 250; é 10.

	4	2
180	40	20
20	0	

	12	2
250	20	10
10	0	

Finalmente, entre 300 e 10; é 10, porque 300 é divisível por 10.

Propriedades do maior divisor comum — *I. Quando se dividem* (ou se multiplicam) *dois números por um terceiro, o maior divisor comum entre êles fica dividido* (ou multiplicado) *por êste terceiro número.*

Com efeito: o m. d. c. entre 180 e 40 é 20. Se dividirmos 180 e 40 por 10, acharemos 18 e 4, respectivamente, e o m. d. c. entre êstes números é 2, isto é, $20 \div 10$.

Se dividíssemos 180 e 40 por 20, acharíamos 9 e 2, respectivamente, e o m. d. c. entre 9 e 2 é $20 \div 20 = 1$, isto é, 9 e 2 são números primos entre si.

II. Quando se dividem dois números pelo seu maior divisor comum, os quocientes são números primos entre si.

Já sabemos que o m.d.c. a 1868 e 456 é 4 (veja página 50); os quocientes de 1868 e 456 por 4 são, respectivamente, 467 e 114. Procuremos o m. d. c. a êstes dois quocientes.

	4	10	2	1	3
467	114	11	4	3	1
11	4	3	1	0	

O m.d.c. é a unidade; logo, os quocientes 467 e 114 são números primos entre si.

Composição do maior divisor comum — Dados dois ou mais números, pode-se formar o maior divisor comum entre êles por meio dos seus fatôres primos. Basta efetuar o produto dos fatôres primos comuns a êsses números, elevados aos menores expoentes.

Exemplo: Formar o m.d.c. a 378, 180 e 396.

Decompondo êsses números em seus fatôres primos, encontra-se:

$$378 = 2 \times 3^3 \times 7$$
$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$
$$396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$$

Os fatôres comuns são 2 e 3; o menor expoente de 2 é 1; o menor expoente de 3 é 2. O maior divisor comum a 378, 180 e 396 é

$$2 \times 3^2 = 18$$

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

1. Que é m.d.c. de dois ou mais números?

2. De que se compõe o m.d.c. de dois ou mais números?

3. Que outro processo se pode empregar para obter o m.d.c. de dois ou mais números?

4. Cite uma propriedade do m.d.c.

5. Quando o m.d.c. de dois números é um dos números dados?

6. Componha o m.d.c. de 430 e 680; 85 e 1 245; 842 e 560; 4 560 e 325; 500 e 1 200; 1 004, 50 e 70.

7. Ache o m.d.c. de 420, 360 e 280; 1 200, 480 e 900; 1 850, 350, 90 e 36.

8. Cite dois números cujo m.d.c. seja 60.

9. Quais os três maiores divisores comuns de 40 e 96?

10. Forme o m.d.c. dos produtos seguintes sem efetuá-los:

$2 \times 5^3 \times 7$ $\quad 2^3 \times 5^2 \times 11$ $\quad 3 \times 5^4 \times 13$

Resp.: 2×5^2.

$5^2 \times 7^2 \times 13^2$ $\quad 2 \times 5 \times 7^2$ $\quad 3^2 \times 5 \times 7^4$

Resp.: 5×7^2.

11. Ache o m.d.c. dos seguintes números sem decompô-los em fatôres: 3 560, 280 e 520; 160, 325 e 540.

12. A que é igual o m.d.c. de dois números primos entre si?

13. Dois números inteiros consecutivos podem ter fatôres comuns diferentes de 1?

14. O m.d.c. de vários números é 18. Se multiplicarmos cada um dêles por $3^2 \times 5$, qual será o m.d.c. dos números resultantes?

Resp.: $18 \times 3^2 \times 5 = 810$.

15. Quais são os divisores comuns de 2 400 e 1 280 compreendidos entre 30 e 100?

Resp.: 32, 40 e 80.

16. O m.d.c. de vários números é 1 800. Qual é o maior divisor comum dos quocientes dêsses números por $2^2 \times 3$?

(Resp.: $1\,800 \div (2^2 \times 3) = 150$.

17. Qual o m.d.c. de dois números ímpares consecutivos?

18. O m.d.c. de dois números é 16 e os quocientes encontrados no processo das divisões sucessivas foram 2, 3 e 5. Quais são os números?

Resp.: 592 e 256.

19. Um negociante quer cortar três peças de fita em comprimentos iguais entre si, mas que sejam os maiores possíveis. As peças medem 24 metros, 32 metros e 56 metros. Que comprimento terá cada pedaço e quantos pedaços conseguirá o negociante?

Resp.: 14 pedaços de 8 metros.

MENOR MÚLTIPLO COMUM

Múltiplo comum a dois ou mais números é todo número divisível ao mesmo tempo por todos os números dados.

Exemplo: 500 é múltiplo comum a 100, 50, 25, porque é divisível ao mesmo tempo por êstes três números.

Menor múltiplo comum a vários números, como a própria expressão está indicando, é o menor número divisível por todos os números dados.

Exemplo: Dados os números 3 e 25, encontraremos fàcilmente uma infinidade de outros números, que são múltiplos comuns aos dois (150, 300, 450, etc.), mas o menor de todos êles é 75. O menor múltiplo comum a 3 e a 25, é, portanto, 75.

A abreviatura de menor múltiplo comum é *m.m.c.*

Menor múltiplo comum a dois números — Na pesquisa do menor múltiplo comum a dois números dados, consideraremos dois casos:

1.º caso: Um dos números divide o outro.

Nêste caso, o m.m.c. é o maior dos números dados.

Exemplo: O m.m.c. a 600 e a 200 é 600. Realmente, um número menor do que 600 pode ser divisível por 200 (400, por exemplo), mas não o será por 600.

2.º caso: O número maior não é divisível pelo menor

Neste caso, procede-se da seguinte forma: *Procura-se o maior divisor comum aos dois números, divide-se um dêles por êste maior divisor e, em seguida, multiplica-se o quociente desta divisão pelo outro número dado. O produto formado é o menor múltiplo comum procurado.*

Exemplo: Procurar o m.m.c. a 120 e 150.

O maior divisor comum aos números dados é 30. Dividindo-se 120 por 30, acha-se 4; êste quociente multiplicado por 150 dá 600, que é o menor múltiplo comum procurado.

Encontrar-se-ia o mesmo resultado dividindo 150 por 30 e multiplicando o quociente, 5, por 120.

Menor múltiplo comum a três ou mais números — *Para se obter o menor multiplo comum a três ou mais números, procura-se o menor múltiplo comum a dois dos números dados; depois, o menor múltiplo comum a êsse múltiplo comum e ao terceiro número, e, assim, sucessivamente até o último número dado. O último resultado obtido é o menor múltiplo comum procurado.*

Seja determinar o m.m.c. a 20, 30 e 50.

Procura-se o menor múltiplo comum a 50 e 30; é 150. Em seguida, procura-se o menor múltiplo comum a 150 e 20; é 300. Logo, o m.m.c. a 20, 30 e 50 é 300.

Composição do menor múltiplo comum — É fácil, com os fatôres primos de dois ou mais números, formar o menor múltiplo comum a êsses números. Basta efetuar o *produto dos fatôres primos diferentes* (isto é, comum e não comuns) *elevados aos maiores expoentes os que forem comuns.*

Exemplo: Formar o m.m.c. a 90, 84 e 40.

Decompondo cada um dêles em seus fatôres primos, achamos:

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$
$$84 = 2^2 \times 3 \times 7$$
$$40 = 2^3 \times 5$$

Os fatôres primos diferentes são 2, 3, 5 e 7; o maior expoente de 2 é 3; de 3 é 2; de 5 e de 7 é 1. O menor múltiplo comum é $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$, isto é,

$$\text{m.m.c.} = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$$

OBSERVAÇÃO — Se dois números forem primos entre si, o menor múltiplo comum será o produto dêles.

Exemplo: o m.m.c. a 17 e a 20 é 17 × 20 ou 340.

Como formar todos os múltiplos comuns a vários números — Conhecido o m.m.c. a vários números é fácil formar todos os outros mútiplos comuns aos números dados. Basta multiplicar o m.m.c. pela série natural dos números inteiros, isto é, por 2, 3, 4, 5, etc.

Exemplo: Formar todos os múltiplos comuns a 90, 84 e 40.

O m.m.c. a 90, 84 e 40 é 2520. Os outros múltiplos comuns aos números dados são 2520 × 2, 2520 × 3, 2520 × 4, etc.

EXERCÍCIOS E PROBLEMAS

1. Que é m.m.c. de dois ou mais números?

2. De que se compõe o m.m.c. de dois ou mais números?

3. Como se podem formar todos os múltiplos comuns de vários números dados?

4. Procure o m.d.c. dos números: 200 e 540; 520, 670 e 840; 50, 100 e 170.

5. Cite os três menores múltiplos comuns de 160, 30 e 24.

6. Forme todos os múltiplos comuns de 8, 12 e 15 menores do que 1 000.

7. Um papeleiro tem papel em resmas de 400 fôlhas e em resmas de 500 fôlhas. Quer formar de ambas as espécies pilhas do mesmo número de fôlhas, sem desmanchar as resmas. Qual o menor número de fôlhas de uma pilha e de quantas resmas se deve compor

cada pilha? Resp.: 2 000 fôlhas; 4 resmas de 500 fôlhas ou 5 resmas de 400 fôlhas.

8. Qual o menor número a subtrair de 4 568 para ter um múltiplo comum de 100, 180 e 225? Resp.: 68.

9. Qual o menor múltiplo comum de dois números inteiros consecutivos?

10. Qual é o menor número de três algarismos múltiplo comum de 6, 15 e 9? Resp.: 180.

11. Qual o menor número que dividido por 18, por 12 e por 30 deixa sempre o resto 7? Resp.: 187.

12. Ache os três menores números pelos quais hão de ser multiplicados os números 32, 12 e 60 para que os produtos sejam iguais. Resp.: 15, 40 e 8, respectivamente.

13. Um trem vai da estação *A* para a estação *B* e volta à estação *A* em 45 minutos. Um ônibus faz o mesmo em 60 minutos. Tendo ambos partido de *A* às 10 horas da manhã, a que horas sairão dali novamente juntos? Resp.: às 13 horas.

14. O número de páginas de um livro está compreendido entre 1 200 e 1 300. Se contarmos de 20 em 20, de 35 em 35 ou de 45 em 45 páginas, sempre sobram 11 páginas. Quantas páginas tem o livro? Resp.: 1 271 páginas.

15. Ache o m.m.c. dos produtos, sem efetuá-los:

$$3^2 \times 5 \times 7$$
$$2 \times 5^2$$
$$3 \times 2^3 \times 5$$

16. Quais são os múltiplos comuns de 50, 84 e 30 menores do que 10 000?

17. O m.m.c. de vários números é 600. Qual é o m.m.c. dos produtos daqueles números por $3^2 \times 5$? Resp.: 12 000.

18. Numa corrida de automóveis, o corredor *A* dá volta na pista em 24 minutos e o corredor *B* em 30 minutos. De quanto em quanto tempo os dois corredores se encontram no ponto de partida? Resp.: De 2 em 2 horas.

19. O m.d.c. de dois números é 1. Qual é o m.m.c. entre os mesmos números? Resp.: O produto dêles.

20. Que valores se devem dar a *m* e a *n* para que o m.m.c. de $2^3 \times 3^m \times 5^2$ e $2^n \times 3^2 \times 5^2$ seja $2^7 \times 3^1 \times 5^2$?

21. Qual o menor múltiplo de 15 que é divisível por 12 e por 8? Resp.: 120.

22. Sem efetuar os produtos abaixo, calcular o m.m.c. entre êles:

$$2 \times 3^3 \times 5 \times 7$$
$$2^5 \times 3^2 \times 7^2$$
$$2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$$

23. Qual o menor número inteiro por que se deve multiplicar 60 para ter um múltiplo de 72? Resp.: 6.

FRAÇÕES ORDINÁRIAS

Fração é uma ou mais partes da unidade considerada dividida em um certo número de partes iguais.

Suponhamos que se toma um comprimento (o palmo, por exemplo) para unidade de extensão; dividindo-se êsse comprimento em 8 partes iguais, uma dessas partes, ou duas delas, ou três, etc., são *frações* da unidade.

Da própria definição de fração conclui-se que dois números são necessários para representar uma fração: um para indicar em quantas partes foi dividida a unidade — é o *denominador;* outro para indicar quantas dessas partes foram tomadas ou consideradas — é o *numerador.* Êsses dois números são geralmente dispostos do seguinte modo: escreve-se o numerador e em baixo o denominador, separando-os, por um traço horizontal.

Exemplo: se dividirmos a unidade em 8 partes e considerarmos 3 dessas partes a fração será $\frac{3}{8}$.

Numerador e denominador chamam-se *têrmos* da fração.

Leitura de uma fração — Para ler uma fração, lê-se o numerador e em seguida o denominador acompanhado da terminação *avos.*

Exemplo: $\frac{3}{14}$ lê-se *três quatorze avos;* $\frac{7}{12}$ lê-se *sete doze avos;* $\frac{15}{36}$ lê-se *quinze trinta e seis avos.*

Esta regra apresenta as seguintes exceções:

1.ª) Quando o denominador é 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, lê-se, respectivamente, *meios, terços, quartos, quintos, sextos, sétimos, oitavos* ou *nonos.*

Exemplos: $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{7}{9}$

lêem-se, respectivamente, um meio, dois terços, um quarto, três quintos, cinco sextos, dois sétimos, três oitavos e sete nonos.

2.ª) Quando o denominador é uma potência de 10, isto é, 10, 100, 1000, etc. (a unidade seguida de zeros), lê-se: *décimos, centésimos, milésimos*, etc.

Exemplos: $\frac{4}{10}$ $\frac{17}{100}$ $\frac{59}{1000}$

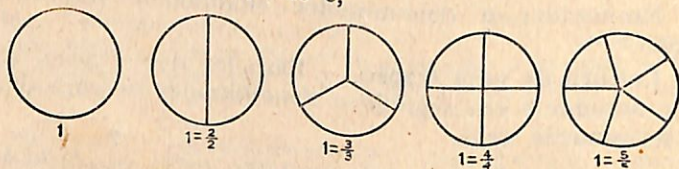
lêem-se, respectivamente: quatro décimos, dezessete centésimos, cinqüenta e nove milésimos.

3.ª) Quando o denominador é 11, 12, 20 ou 30, também se diz: *undécimos, duodécimos, vigésimos* ou *trigésimos*.

Exemplos: $\frac{5}{11}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{13}{20}$ $\frac{19}{30}$

lêem-se, respectivamente: cinco undécimos, sete duodécimos, treze vigésimos, dezenove trigésimos.

Frações de têrmos iguais — Se dividirmos um bolo em 4 partes iguais e tomarmos as 4 partes resultantes, tomaremos o bôlo todo, isto é,

1 $\quad 1 = \frac{2}{2} \quad 1 = \frac{3}{3} \quad 1 = \frac{4}{4} \quad 1 = \frac{5}{5}$

$$\frac{4}{4} = 1$$

Se o bolo tivesse sido dividido em 7 partes e houvéssemos tomado as 7, também teríamos tomado um bolo inteiro, isto é,

$$\frac{7}{7} = 1$$

Chegamos, então, à conclusão de que *tôda fração que tem os têrmos iguais entre si é igual à unidade.*

Classificação das frações — Uma fração pode ser *própria* ou *imprópria*.

Chama-se *fração própria* aquela que é menor do que a unidade. *Fração imprópria* é aquela que é maior do que a unidade.

É fácil reconhecer se uma fração é própria ou imprópria. A fração é própria quando o numerador é menor do que o denominador; porque, tendo-se dividido a unidade em um cêrto número de partes iguais, não se chega a considerar tôdas.

Exemplos; $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{9}{13}$ são frações próprias.

Quando o numerador é maior do que o denominador, a fração é imprópria; porque, então, se considera um número de partes maior do que aquêle em que se dividiu a unidade.

Exemplos: $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{13}{9}$, $\frac{21}{7}$, são frações impróprias.

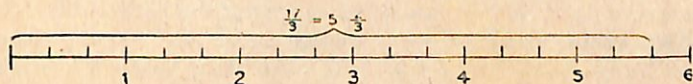
Extração de inteiros de uma fração. Número misto — Tôda fração imprópria contém uma ou mais unidades.

Extrair os inteiros de uma fração é determinar quantas unidades ela contém.

Exemplo: extrair os inteiros de $\frac{17}{3}$.

Raciocinemos: três têrços formam uma unidade; em dezessete têrços há, portanto, $17 \div 3 = 5$ unidades e ainda

$\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$

1 2 3 4 5 6

sobram $\frac{2}{3}$. Escreve-se, então, $\frac{17}{3} = 5\,\frac{2}{3}$

Raciocínio semelhante faríamos para qualquer outra fração imprópria e chegaríamos à seguinte regra para extrair os inteiros de uma fração: *Divide-se o numerador pelo denominador; o quociente é a parte inteira e o resto é o numerador da parte fracionária.*

A expressão $5\frac{2}{3}$ formada por um número inteiro (5) e por uma fração $(\frac{2}{3})$ é um *número misto.*

OBSERVAÇÃO — Se o numerador fôr múltiplo do denominador, a fração imprópria é igual a um número inteiro.

Exemplo: $\frac{21}{7} = 3$

Dar a um número inteiro a forma fracionária — Podemos sempre dar a um número inteiro qualquer a forma de fração com o denominador que se escolher.

Exemplo: dar ao número 8 a forma fracionária com o denominador 5.

Basta refletir em que cada inteiro corresponde a 5 quintos; logo 8 inteiros são 8 × 5 quintos, isto é,

$$8 = \frac{40}{5}$$

É fácil deduzir a seguinte regra: *escolhido o denominador, o numerador será o produto do inteiro pelo denominador.*

O denominador pode ser a unidade e nêsse caso o número inteiro dado será o numerador.

Exemplo: $17 = \frac{17}{1}$ $\quad 15 = \frac{15}{1}$

Dar a forma fracionária a um número misto — Seja dar a forma de fração imprópria ao número misto $5\frac{2}{3}$.

Raciocinemos: cada inteiro corresponde a 3 terços; logo, 5 inteiros são 15 terços, mais 2 terços da parte fracionária, são $\frac{17}{3}$. Podemos escrever:

$$5\frac{2}{3} = \frac{17}{3}$$

O mesmo raciocínio faríamos para qualquer outro número misto e chegaríamos, então, fàcilmente, à seguinte regra: *dá-se para numerador o produto do inteiro pelo denominador, mais o numerador da parte fracionária; o denominador da fração imprópria é o mesmo da parte fracionária.*

Propriedades das frações — 1.º) *De duas frações que têm o mesmo denominador a maior é a que tem maior numerador.*

Exemplo: $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$

porque o tamanho de cada parte sendo o mesmo nos dois casos (quinto), no primeiro foram consideradas 4 e no segundo só 3 dessas partes.

2.ª) *De duas frações que têm o mesmo numerador a maior é a que tem menor denominador.*

Exemplo: $\frac{5}{12} > \frac{5}{14}$

porque nos dois casos o número de partes consideradas foi o mesmo (5), mas no primeiro caso cada parte é maior do que no segundo.

3.ª) *Multiplicando-se ou dividindo-se o numerador de uma fração por um número, conservando-se o denominador, o valor da fração fica multiplicado ou dividido por êsse número.*

Exemplo: Seja a fração $\frac{3}{100}$. Se multiplicarmos o

numerador por 5 e conservarmos o denominador 100, obtemos a fração $\frac{15}{100}$ que é 5 vêzes maior do que a fração primitiva $\frac{3}{100}$; porque o tamanho de cada parte não variou, mas o número dessas partes se tornou 5 vêzes maior.

Se, pelo contrário, se dividisse o numerador de uma fração por um número, conservando o denominador, o valor da fração ficaria dividido por êsse número.

Exemplo: Se tomarmos a fração $\frac{15}{100}$ e dividirmos o numerador 15 por 5, conservando o denominador, a fração resultante será $\frac{3}{100}$, que é cinco vêzes menor do que a primitiva.

4.ª) *Multiplicando-se ou dividindo-se o denominador de uma fração por um número, conservando-se o numerador, o valor da fração se torna êsse mesmo número de vêzes menor ou maior.*

Exemplo: Seja a fração $\frac{3}{4}$. Se multiplicarmos o denominador por 5, conservando o numerador 3, obteremos a fração $\frac{3}{20}$, que é 5 vêzes menor do que $\frac{3}{4}$; porque o número de partes consideradas não variou, mas o tamanho de cada parte se tornou 5 vêzes menor.

Se, pelo contrário, se dividisse o denominador de uma fração por um número conservando o numerador, o valor da fração ficaria êsse mesmo número de vêzes maior.

Com efeito: tomando a fração $\frac{15}{100}$ e dividindo o denominador por 5, sem alterar o numerador, obtemos a fração $\frac{15}{20}$ que é 5 vêzes maior do que $\frac{15}{100}$

5.ª) *O valor de uma fração não se altera, quando se multiplicam ou se dividem seus dois têrmos por um mesmo número.*

Tomemos a fração $\frac{3}{4}$. Se multiplicarmos o numerador por 2, ela se tornará 2 vêzes maior; mas se, em seguida, multiplicarmos o denominador por 2, a fração achada se tornará 2 vêzes menor, isto é, a fração volta ao seu valor primitivo. Podemos, portanto, escrever:

$1 = \frac{4}{4} = \frac{8}{8}$

$\frac{3}{4}$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$$

$\frac{6}{8}$

O mesmo sucederia se dividissemos ambos os têrmos pelo mesmo número: quando dividissemos o numerador, o valor da fração se tornaria êsse número de vêzes menor; mas, dividindo, em seguida, o denominador, o valor da fração achada se tornaria o mesmo número de vêzes maior, isto é, voltaria ao valor primitivo. Podemos, então, escrever por exemplo:

$$\frac{12}{15} = \frac{12 \div 3}{15 \div 3} = \frac{4}{5}$$

OBSERVAÇÃO — Desta propriedade se conclui que, sem alterar o valor de uma fração, podemos representá-la

de uma infinidade de modos, isto é, com têrmos muito diferentes. Basta ir multiplicando ambos os seus têrmos sucessivamente pelos números inteiros na sua ordem natural; as frações encontradas são tôdas iguais à fração dada.

Exemplo:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \ldots$$

Simplificação de frações — *Simplificar* uma fração é substituí-la por outra do mesmo valor com têrmos menores.

Há vantagem na simplificação das frações, não só por conduzir a operações com números menores, como também para se ter uma idéia mais exata do valor que ela representa. Com efeito, é mais fácil fazer idéia da fração $\frac{1}{11}$, por exemplo, do que de $\frac{13}{143}$; entretanto, estas duas frações têm o mesmo valor, porque a segunda resulta da primeira, multiplicando-se ambos os têrmos por 13.

Para simplificar uma fração, basta dividir seus dois têrmos pelo mesmo número. Com efeito, a fração resultante terá o mesmo valor da fração dada, mas os seus têrmos serão menores.

Exemplo: Simplificar a fração $\frac{120}{300}$.

Logo à primeira vista, percebe-se que ambos os têrmos são divisíveis por 10; dividindo-se por êste fator comum, vem

$$\frac{120}{300} = \frac{12}{30}$$

A fração $\frac{12}{30}$, por sua vez, ainda pode ser simplificada,

pois ambos os seus têrmos são pares e, portanto, divisíveis por 2. Efectuando a divisão, vem:

$$\frac{12}{30} = \frac{12 \div 2}{30 \div 2} = \frac{6}{15}$$

Como 6 e 15 admitem o divisor comum 3, ainda se pode simplificar a fração $\frac{6}{15}$ dividindo os seus têrmos por 3. Vem

$$\frac{6}{15} = \frac{6 \div 3}{15 \div 3} = \frac{2}{5}$$

A fração achada, $\frac{2}{5}$, não pode mais ser simplificada, porque não há entre os seus têrmos nenhum divisor comum diferente da unidade.

Quando uma fração não pode ser simplificada, diz-se que ela *está reduzida à sua expressão mais simples*, ou que *é irredutível*.

Reduzir uma fração à sua expressão mais simples — Para reduzir uma fração à sua expressão mais simples, pode-se adotar o processo dado acima, isto é, ir dividindo ambos os têrmos da fração por todos os fatôres comuns. Êsse processo, porém, é, às vêzes, moroso.

Se se quiser obter logo uma fração irredutível, *procura-se o maior divisor comum aos têrmos da fração e se os divide por êsse maior divisor comum.*

Com efeito, para que a fração seja irredutível é preciso que não haja fatôres comuns aos seus têrmos além da unidade, isto é, é preciso que os têrmos da fração sejam números primos entre si. Ora, já sabemos (veja página 51), que quando se dividem dois números pelo maior divisor comum, os quocientes são primos entre si.

Exemplo: Reduzir $\frac{96}{216}$ à expressão mais simples:

O m.d.c. a 96 e a 216 é 24. Efetuando a divisão de ambos os têrmos, vem:

$$\frac{96}{216} = \frac{96 \div 24}{216 \div 24} = \frac{4}{9}$$

REDUÇÃO DE FRAÇÕES AO MESMO DENOMINADOR

Reduzir duas ou mais frações ao mesmo denominador é obter frações respectivamente iguais às frações dadas, tendo tôdas o mesmo denominador.

Esta operação é necessária não só para se somar e subtrair frações, mas também para se comparar o valor delas.

Suponhamos que se deseja saber qual a maior fração:

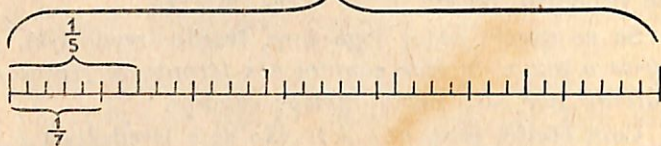
$$\frac{4}{5} \text{ ou } \frac{6}{7}.$$

Se multiplicarmos os dois têrmos da primeira fração por 7, não alteraremos o seu valor; o mesmo se dará se multiplicarmos os têrmos da segunda por 5. Acha-se:

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 7}{5 \times 7} = \frac{28}{35} \quad \text{e} \quad \frac{6}{7} = \frac{6 \times 5}{7 \times 5} = \frac{30}{35}$$

$$1 = \frac{5}{5} = \frac{7}{7} = \frac{35}{35}$$

$\frac{1}{5}$

$\frac{1}{7}$

$\frac{4}{5} = \frac{28}{35}$

$\frac{6}{7} = \frac{30}{35}$

As frações $\frac{28}{35}$ e $\frac{30}{35}$ são respectivamente iguais a $\frac{4}{5}$ e $\frac{6}{7}$ e têm o mesmo denominador.

Já agora pode-se afirmar que $\frac{6}{7}$ é maior do que $\frac{4}{5}$.

Quaisquer que fossem as frações dadas, procederíamos do mesmo modo, isto é, *para reduzir duas frações ao mesmo denominador, basta multiplicar ambos os têrmos de cada fração pelo denominador da outra.*

Reduzir várias frações ao mesmo denominador — Sejam as frações:

$$\frac{4}{5} \quad \frac{3}{7} \quad \text{e} \quad \frac{5}{8}$$

que desejamos reduzir ao mesmo denominador.

Se multiplicarmos os têrmos da primeira fração por 7×8, os da segunda por 5×8 e os da terceira por 5×7, obteremos outras frações respectivamente iguais às frações dadas e com o mesmo denominador. Efetuemos

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 7 \times 8}{5 \times 7 \times 8} = \frac{224}{280}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{3 \times 5 \times 8}{7 \times 5 \times 8} = \frac{120}{280}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 5 \times 7}{8 \times 5 \times 7} = \frac{175}{280}$$

Quaisquer que fossem as frações dadas, poderíamos proceder do mesmo modo, isto é, para *reduzir várias frações ao mesmo denominador, basta multiplicar ambos os têrmos de cada fração pelo produto dos denominadores de tôdas as outras.*

Redução de frações ao menor denominador comum — Na prática convém sempre reduzir logo as frações ao